Les Relations d'Équivalences

Marc Abboud
Séance Parimaths

5 Octobre 2019

1 Définitions et premiers exemples.

En mathématiques, une des premières choses que l'on fait c'est construire des objets et les étudier. Seulement voilà si parfois deux objets paraissent un peu différent, au vu de certaines propriétés ils ont l'air de se comporter de la même manière. Par exemple, si je prends l'ensemble $\{1,2,3\}$ et l'ensemble $\{a,b,c\}$, ils ne sont pas *strictement* égaux mais j'ai quand même envie de dire que manipuler l'un ou l'autre revient au même quand je ne considère que la taille de mes ensembles.

Un autre exemple plus simple est le cas des fractions, tout le monde sait que $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, mais ce n'est pas strictement vrai car le terme de gauche est représenté par un 2 et un 6 et celui de droite par un 1 et un 3, seulement on a su définir une "égalité" qui permet d'identifier ces deux termes. Cette nouvelle égalité est ce qu'on appelle une relation d'équivalence.

Les trois propriétés de l'égalité est que $x=x$, si $x=y$ alors $y=x$ et enfin si $x=y$ et $y=z$ alors $x=z$. Et on part de ça pour définir les relations d'équivalences.

Définition 1.1. Soit E un ensemble, une relation d'équivalence sur E est un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $E\times E$ (on notera $x\mathcal{R}y$ pour $(x,y)\in\mathcal{R}$) telle que
-(Réflexivité) Pour tout $x\in E, x\mathcal{R}x$.
-(Symétrie) Pour tout $x,y\in E, x\mathcal{R}y\Rightarrow y\mathcal{R}x$.
-(Transitivité) Pour tout $x,y,z\in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.
Si $x\mathcal{R}y$, on dit que x est *en relation* avec y.

Dans la suite, on notera plutôt $x\sim y$ pour les relations d'équivalences.

Exercice 1. On considère la classe des ensembles finis(et oui l'ensemble des ensembles n'existe pas...). Soient X,Y deux ensembles, on définit la relation $X\sim Y\Leftrightarrow \operatorname{Card}X=\operatorname{Card}Y$. Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Remarque 1.2. On peut en fait définir cette relation d'équivalence pour les ensembles infinis aussi mais ça prendrait une séance parimaths...

Exercice 2. Déterminer l'erreur dans le raisonnement suivant : Si $\mathcal{R}$ est une relation sur E qui est symétrique et transitive, alors elle est réflexive car pour tout $x,y\in E$, on a $x\mathcal{R}y\Rightarrow y\mathcal{R}x$ et $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x)\Rightarrow x\mathcal{R}x$.

Exercice 3. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On définit la relation $\mathcal{S}$ par $x\mathcal{S}y\Leftrightarrow$ il existe $n\geq 1$ et une suite finie $x_0,x_1,....,x_n$ d'éléments de E tels que $x_0=x, x_n=y$ et pour tout $0\leq p\leq n-1, x_p\mathcal{R}x_{p+1}$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 4. On travaille sur $\mathbf{Z}$, soit $n\geq 2$ un entier. On définit la relation $\sim_n$ par : pour tout $x,y\in\mathbf{Z}, x\sim_n y\Leftrightarrow n$ divise $y-x$. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$ (elle doit être familière pour celles et ceux en terminale...). Montrer de plus que si $a\sim_n b$ et $c\sim_n d$, alors $a+c\sim_n b+d$ et $ac\sim_n bd$ (on verra plus tard pourquoi c'est vrai dans un contexte plus général avec les groupes et les anneaux).

Typiquement, on voit qu'avec cette relation d'équivalence tous les nombres de la forme $kn+1$ sont "égaux" et ce qui importe finalement c'est uniquement le reste dans la division euclidienne par n.

Exercice 5. Soit $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$, on considère la relation $f \sim g \Leftrightarrow$ il existe un ensemble fini $A \subset \mathbf{R}$ tel que $f - g = 0$ sur $\mathbf{R} \setminus A$. Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Exercice 6. Soit $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$, on considère la relation $f \simeq g \Leftrightarrow \exists M > 0, |f - g| \leq M$ montrer que c'est une relation d'équivalence.

Définition 1.3. Soit E un ensemble. Une partie de E est un sous-ensemble de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Une *partition* Π de E est la donnée d'un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ tel que
- Pour tout $A \in \Pi$, $A \neq \emptyset$.
- Pour tout $A, B \in \Pi, A \cap B = \emptyset$.
- $\bigcup_{A \in \Pi} A = E$.

Exercice 7. Donner toutes les partitions de $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 8 (Classe d'équivalence)**.** Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Pour tout $x \in E$, on définit $C_x := \{y \in E \mid x \sim y\}$, c'est la classe d'équivalence de x. Montrer que

1. Pour tout $x \in E, C_x$ n'est pas vide.
2. Pour tout $x, y \in E$, on a les deux possibilités suivantes : $C_x \cap C_y = \emptyset$ ou bien $C_x = C_y$.
3. Montrer que $E = \bigcup_{x \in E} C_x$.

On voit donc que les classes d'équivalences d'une relation d'équivalence forment une partition.

On note $E/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence sur E.

Exercice 9. On définit sur $\mathbf{R}$ la relation $x \sim y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbf{R}$.

Exercice 10. Montrer que se donner une relation d'équivalence sur un ensemble E revient à se donner une partition de E. Plus précisément, montrer qu'à partir d'une relation d'équivalence on peut construire une partition de E et montrer qu'à partir d'une partition de E on peut construire une relation d'équivalence sur E et que ces deux procédés sont inverse l'un de l'autre.

Exercice 11. Soit r_n le nombre de relations d'équivalences sur $\{1, ..., n\}$. Montrer que

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} r_{n-k-1}$$

Exercice 12. Décrire $\mathbf{Z}/\sim_n$.

Exercice 13. On considère le plan $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et la relation $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}^*, (x, y) = \lambda(x', y')$. Et on note $\mathbf{P}^1\mathbf{R} = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} / \sim$. Donner une interprétation géométrique de $\sim$ et montrer que $\mathbf{P}^1\mathbf{R}$ peut se voir comme la droite des réels avec un point à l'infini.

2 Quotient de groupes, d'anneaux

Définition 2.1. Soit G un ensemble muni d'une loi $\cdot$, G est un groupe commutatif si
- (élément neutre) Il existe $e \in G$ tel que $\forall g \in G, e \cdot g = g \cdot e = g$.
- (associativité) Pour tout $x, y, z \in G, x(yz) = (xy)z$
- (existence d'un inverse) Pour tout $x \in G, \exists y \in G, xy = yx = e$.
- Pour tout $x, y \in G, xy = yx$.

Remarque 2.2. Avec des notations multiplicatives, on notera 1 l'élément neutre. On peut aussi travailler en notation additive et dans ce cas $e = 0$.

De même, l'inverse d'un élément x sera noté x^{-1} ou $-x$ selon que l'on utilise la notation additive ou multiplicative.

Définition 2.3. Soit G un groupe et H une partie de G. On dit que H est un sous-groupe de G si
- $1_G \in H$.
- Pour tout $x, y \in H, xy \in H$.
- Pour tout $x \in H, x^{-1} \in H$.

Exercice 14. Montrer que dans un groupe, l'élément neutre est unique.

Exercice 15. Montrer que $(\mathbf{Z}, +)$ est un groupe. Est-ce que $(\mathbf{Z}, \times)$ est un groupe ? Est-ce que $(\mathbf{R}, \times)$ est un groupe ?

Définition 2.4. Soit G un groupe abélien et H un sous-groupe de G. On définit la relation suivante :

$$\forall x, y \in G, x \sim_H y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

Exercice 16.
1. Montrer que $\sim_H$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que $G/H := G/\sim_H$ est un groupe avec l'opération $\forall x, y \in G, C_x \cdot C_y = C_{xy}$. Quel est l'élément neutre ? Montrer que les éléments de H sont "tués" dans G/H.
3. Montrer que l'application $\pi : G \to G/H$ est un morphisme de groupes surjectif.
4. Reprendre l'exemple avec $G = \mathbf{Z}$ et $H = n\mathbf{Z}$.

Exercice 17. Soit G, G' deux groupes et $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes. C'est à dire que pour tout $x, y \in G, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ et $\varphi(1) = 1$. On définit $\ker\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = 1\}$. Montrer que $\ker\varphi$ est un sous-groupe de G, montrer qu'il existe un unique morphisme de groupe $\overline{\varphi} : G/\ker\varphi \to G'$ tel que $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$.

Montrer de plus que $\overline{\varphi}$ est injective.

Remarque 2.5. Cette propriété est la propriété la plus importante des quotients et des relations d'équivalences.

Exercice 18. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}$. Montrer que $\mathbf{K}^*$ est un groupe pour la loi de multiplication. Montrer que $(\mathbf{K}^*)^2 = \left\{x \in \mathbf{K}^* \mid \exists y \in \mathbf{K}^*, y^2 = x\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{K}^*$. Décrire $\mathbf{K}^*/(\mathbf{K}^*)^2$. (Indice : tout polynôme de degré 2 a une racine dans $\mathbf{C}$).

Définition 2.6. On dit que $(A, +, \times)$ est un anneau si
- Si $(A, +)$ est un groupe.
- (associativité) $\forall a, b, c \in A, a(bc) = (ab)c$.
- (distributivité) $\forall a, b, c \in A, a(b + c) = ab + ac$.
- Il existe un élément $1_A \in A$ qui est le neutre pour la multiplication.
- La multiplication est commutative.

De plus, on dit que A est un corps si tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication.

Exercice 19. Montrer que $\mathbf{Z}$ est un anneau, est-ce que c'est un corps ?

Soit K un corps. Montrer que $K \times K$ n'est pas un corps (préciser la loi d'anneau).

Définition 2.7. Soit A un anneau. Soit $I \subset A$, on dit que I est un idéal si $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ et pour tout $a \in A, i \in I, a \cdot i \in I$.

Exercice 20. Soit A un anneau et $f \in A$, on définit $(f) = \{f \cdot a \mid a \in A\}$. Montrer que (f) est un idéal. Montrer que c'est le plus petit idéal contenant f, c'est à dire que tout idéal I contenant f vérifie $(f) \subset I$.

Exercice 21. Soit $A = \mathbf{Z}$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}, n\mathbf{Z}$ est un idéal.

Exercice 22 (Quotient)**.** On peut faire la même chose avec les anneaux. Soit A un anneau et I un idéal de A. On définit l'anneau quotient A/I en faisant le quotient de groupe $(A, +)/I$, montrer que cet ensemble a bien la structure d'anneau que l'on veut.

Maintenant reprenez l'exemple avec $A = \mathbf{Z}$ et $I = n\mathbf{Z}$, montrer que dans le cas où n est premier $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps (fini !) (Indice : utiliser le théorème de Bézout).

Exercice 23. On considère l'anneau $\mathbf{Z}[X]$ et f un polynôme à coefficients entiers. Montrer que $\mathbf{Z}[X]/(f) = \mathbf{Z}[\alpha]$ avec α une racine de f.

Ceci vous montre pourquoi les quotients dans les anneaux sont très important, c'est comme ça que l'on construit des espaces dans lesquels des équations polynomiales ont des solutions quand il n'y en a pas au départ.

Exercice 24.
1. Montrer que $\mathbf{Q}$ n'admet pas de solutions pour l'équation $x = 2$.
2. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ l'équation $x^2 - 1 = y^3$ avec x pair.

Remarque 2.8. Que faire maintenant si on remplace $x^2 - 1$ par $x^2 + 1$?, on a envie de faire la même chose. Mais il faudrait pouvoir factoriser $x^2 + 1 = (x - t)(x + t)$ avec t une racine carré de -1....

3 La construction de C

On va admettre que $\mathbf{Z}$ a déjà était construit. Construisons $\mathbf{Q}$.

Exercice 25. Montrer que $\mathbf{Q} = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*/\sim$ avec $\sim$ une relation d'équivalence à préciser. Montrer que c'est un anneau, puis que c'est un corps.

Maintenant que nous avons construit $\mathbf{Q}$, il faut construire $\mathbf{R}$. Le problème est que cette construction n'est pas algébrique. La différence entre $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$ est que $\mathbf{R}$ est *complet*, mais cette propriété est analytique.

Exercice 26. On considère l'espace $C = \{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mid \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m \geq N, |u_n - u_m| < \varepsilon\}$ des suites de Cauchy rationnelles. On définit la relation $x \sim y \Leftrightarrow \lim_n(x_n - y_n) = 0$.

1. Donner la structure d'anneau de C
2. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. On appelle $A := C/\sim$.
3. Montrer que $I = \{u \in A \mid \lim_n u_n = 0\}$ est un idéal de A. On appelle $\mathbf{R} := A/I$.
4. Montrer qu'il existe une inclusion $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
5. (DUR) Montrer que tout élément de $\mathbf{R}$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathbf{Q}$.

Maintenant que l'on a construit $\mathbf{R}$ (non sans effort). Il nous faut comprendre pourquoi la construction de $\mathbf{C}$ est nécessaire. La raison est algébrique. On sait que sur $\mathbf{R}$, certains polynômes n'ont pas de racine (exemple : X^2+1...). On veut donc créer un espace dans lequel ces polynômes ont une racine. On va déjà définir l'espace des polynômes.

Définition 3.1. Soit A un anneau, on définit $A[X]$ l'anneau des polynômes à coefficient dans A comme ceci : X est une indéterminée, un élement de $A[X]$ est de la forme $\sum_{i\geq 0} a_i X^i$ tel que il existe $N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, a_n = 0$. On définit les lois

$$\sum_{i\geq 0} a_i X^i + \sum_{i\geq 0} b_i X^i$$

$$(\sum_{i\geq 0} a_i X^i) \times (\sum_{i\geq 0} b_i X^i) = \sum_{k\geq 0} c_k X^k$$

avec

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Exercice 27. Vérifier que c'est un anneau.

Exercice 28. On considère l'anneau $\mathbf{R}[X]$ et l'idéal engendré par X^2+1. Montrer que dans l'anneau $\mathbf{R}[X]/(X^2+1)$, l'élément X est une racine de -1. Montrer que c'est un corps (que l'on va appeler... $\mathbf{C}$!).