Les fractions continues

Arthur Touati

14 décembre 2019

Table des matières

1 Les fractions continues **1**
1.1 L'algorithme d'Euclide . . . 1
1.2 Premières définitions . . . 2
1.3 La suite des réduites . . . 3
1.4 Convergence . . . 3

2 Représenter les nombres réels **4**

3 Approcher les nombres réels **5**
3.1 Les meilleures approximations . . . 5
3.2 L'ordre d'approximation . . . 6
3.3 La conjecture de Duffin-Schaeffer . . . 7

4 Les nombres algébriques et transcendants **8**

Ce texte est largement inspiré des deux premiers chapitres du livre *Continued Fractions* de Alexandre Khinchin.

1 Les fractions continues

1.1 L'algorithme d'Euclide

Le fameux algorithme d'Euclide va nous permettre de découvrir le formalisme des fractions continues. Considérons les nombres 145 et 68 :

1. On commence par effectuer la division euclidienne de 145 par 68 : $145 = 2 \times 68 + 9$, ce qui se réécrit
$$\frac{145}{68} = 2 + \frac{9}{68}.$$
2. On effectue ensuite la division euclidienne de 68 par 9 : $68 = 7 \times 9 + 5$, ce qui se réécrit
$$\frac{68}{9} = 7 + \frac{5}{9}.$$
On insère cette expression dans celle de $\frac{145}{68}$:
$$\frac{145}{68} = 2 + \cfrac{1}{7 + \frac{5}{9}}.$$

3. On effectue la division euclidenne de 9 par 5 pour obenir $\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}$, puis celle de 5 par 4 pour obtenir $\frac{9}{5} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}}$, que l'on injecte dans l'expression de $\frac{145}{68}$:

$$\frac{145}{68} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}} \tag{1}$$

Une expression de cette forme est appelée une fraction continue, et dans ce cas il s'agit d'une fraction continue finie. Le nombre $\frac{145}{68}$ admet un développement décimal infini qui commence par 2.13235294... . Pour réprésenter le nombre $\frac{145}{68}$, nous avons donc deux possibilités : on peut choisir la suite infinie de ces décimales ou la suite $[2, 7, 1, 1, 4]$, qui apparait dans la fraction continue égale à $\frac{145}{68}$. Sur cet exemple simple, on perçoit déjà l'intérêt des fractions continues...

Le fait que l'algorithme d'Euclide se termine nous assure que notre algorithme de représentation d'une fraction par une expression de la forme (1) se termine aussi.

1.2 Premières définitions

Plus généralement :

Définition 1. *Une fraction continue est une expression de la forme :*

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}},$$

où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_k \in \mathbb{N}^*$ si $k \geq 1$. L'ensemble des indices de la suites (a_k) est
- *soit de la forme $\{0, \ldots, n\}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on parle alors de fraction continue finie (de taille n).*
- *soit l'ensemble $\mathbb{N}$, on parle alors de fraction continue infinie.*

La suite (a_k) est constitué des éléments de la fraction continue.

Dans la suite on note les fractions continues infinies de la manière suivante :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}} = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots].$$

La notation s'étend naturellement aux fractions continues finies :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

Pour des raisons qui seront expliquées plus tard, nous interdisons que le dernier élément d'une fraction continue finie soit 1, et si c'est le cas on l'intègre dans l'avant-dernier élément :

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, 1] = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1} + 1]$$

Pour l'instant, seules les fractions continues finies ont une valeur numérique certaine : en effet, pour les définir on effectue un nombre fini d'opérations élémentaires sur des nombres entiers, le résultat est donc bien définit et est un nombre rationnel. Avant de pouvoir leur donner un sens rigoureux, les fractions continues infinies sont à comprendre comme des objets formels.

Définition 2. *Si $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ est une fraction continue finie et si $0 \leq k \leq n$, son k-ième reste est la fraction continue finie $r_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_n]$.*

Si $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ est une fraction continue infinie et si $k \geq 0$, son k-ième reste est la fraction continue infinie $r_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_n, \ldots]$.

1.3 La suite des réduites

Si $(a_k)_k$ est une suite d'entiers naturels (avec a_0 un entier relatif), on définit deux suites d'entiers relatifs $(p_k)_k$ et $(q_k)_k$ par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} p_0 = a_0 \quad &\text{et} \quad q_0 = 1, \\ p_1 = a_0 a_1 + 1 \quad &\text{et} \quad q_1 = a_1, \\ \text{et si } k \geq 0 : \quad &\begin{cases} p_{k+2} = a_{k+2} p_{k+1} + p_k \\ q_{k+2} = a_{k+2} q_{k+1} + q_k \end{cases} \end{aligned}$$

On montre facilement par récurrence que $q_k \geq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi la fraction $\frac{p_k}{q_k}$ est bien définit pour tout $k \in \mathbb{N}$. On montre aussi que la suite $(q_k)_k$ est strictement croissante. La proposition suivante est fondamentale :

Proposition 1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k].$$

La suite $(\frac{p_k}{q_k})_k$ est appelé la suite des réduites de la fraction continue dont les éléments sont les $(a_k)_k$. Une fraction continue finie de taille n admet $n+1$ réduites (de taille $0, 1, \ldots, n$), et une fraction continue infinie admet une infinité de réduites. La suite des réduites d'une fraction continue infinie a certaines propriétés intéressantes :

Proposition 2. *Si $(\frac{p_k}{q_k})_k$ est la suite des réduites d'une fraction continue, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$*

1. $q_{k+1} p_k - p_{k+1} q_k = (-1)^{k+1}$,
2. $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k+1}}$,
3. $q_{k+2} p_k - p_{k+2} q_k = (-1)^{k+1} a_{k+2}$,
4. $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} = \frac{(-1)^{k+1} a_{k+2}}{q_{k+2} q_k}$,
5. $q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}$.
6. $\frac{p_k}{q_k}$ *est une fraction irréductible.*

1.4 Convergence

Nous pouvons maintenant répondre à la question de la valeur d'une fraction continue infinie.

Définition 3. *Soit $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ une fraction continue infinie et $(\frac{p_k}{q_k})_k$ la suite de ses réduites. Si cette suite converge, alors sa limite est la valeur de la fraction continue.*

On rappelle que les éléments d'une fraction continue sont des entiers naturels (a_0 exclu). On a le théorème fondamental suivant :

Théorème 1. *Si $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ est une fraction continue infinie, alors la suite de ses réduites converge et sa limite α vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

De plus, α est irrationnel.

Voilà la première différence entre le développement décimal d'un réel et son écriture en fraction continue (si elle existe, voir la section suivante pour une réponse définitive à cette question) : le développement décimal d'un rationnel peut être infinie, alors que la fraction continue associée à un rationnel est finie. A l'inverse un développement décimal infini n'est pas synonyme d'irrationnalité (penser à $\frac{1}{3}$) alors qu'une fraction continue infinie représente toujours un nombre irrationnel.
Pour l'instant, les fractions continues ont l'air de mieux encoder le caractère irrationnel d'un nombre...

Pour finir cette section, nous prouvons une dernière propriété utile :

Proposition 3. *Si $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ est une fraction continue finie, alors pour tout $2 \leq k \leq n$,*

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}.$$

On a l'analogue pour les fractions continue infinie :

Proposition 4. *Si $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ est une fraction continue infinie de valeur α, alors pour tout $k \geq 2$,*

$$\alpha = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}.$$

2 Représenter les nombres réels

Cette section est entièrement dévolue à démontrer et commenter le théorème fondamental suivant :

Théorème 2. *Chaque réel α admet une unique écriture en fraction continue. Cette fraction continue est finie si et seulement si α est rationnel.*

Commençons par une remarque technique : c'est pour l'unicité de l'écriture en fraction continue qu'on a besoin d'interdire qu'une fraction continue finie se termine par un 1. C'est analogue à interdire les développements décimaux se terminant par une infinité de 9.

Comme nous le dit le théorème, il y a existence et unicité d'une écriture en fraction continue pour tout réel. Cela fait largement penser au développement décimal d'un réel. Le formalisme des fractions continues est donc un système de représentation des réels concurrent de celui du développement décimal (ou plus généralement dans une base quelconque). La question est de savoir si on a vraiment besoin d'un autre mode de représentation des réels, autrement dit existe-t-il des questions portant sur les réels pour lesquelles le formalisme des fractions continues apporte une réponse plus simple que le formalisme du développement dans une base ?

Pour répondre à cette question, faisons un petit inventaire (non-exhaustif) des questions que l'on peut se poser concernant les nombres réels :

— si j'ai deux nombres réels a et b et que je sais les écrire dans un formalisme (fraction continue ou développement décimal), j'aimerais pouvoir en déduire l'écriture de $a + b$ ou de $a \times b$.
— si j'ai un nombre réel, j'aimerais pouvoir l'approcher avec un degré de précision arbitraire.
— si je connais l'écriture d'un nombre réel dans un formalisme, je voudrais en déduire le plus de propriétés théoriques de ce nombre possible. Par exemple, est-il rationnel ? algébrique ? transcendant ?

En ce qui concerne la première question, c'est le formalisme du développement décimal qui l'emporte, et de loin, c'est-à-dire qu'il est très facile le développement décimal de $a + b$ à ceux de a et b (comme on le sait depuis l'école primaire) mais il est impossible d'établir un lien entre l'écriture en fraction continue de $a + b$ et celles de a et b.

En revanche, les fractions continues l'emporte en ce qui concerne les deux dernières interrogations, c'est-à-dire celles portant sur l'approximation de nombres réels et leurs propriétés "fondamentales", le formalisme des fractions continues est bien meilleur, comme on va le voir dans les deux sections suivantes. Le théorème démontré dans cette section apporte déjà un élément de réponse à la troisième : la rationnalité d'un réel est équivalente à la finitude de sa fraction continue, et on sait qu'elle est aussi équivalente à la périodicité (à partir d'un certain rang) de son développement décimal. On conviendra qu'il est beaucoup plus simple de vérifier qu'une suite de nombres est finie que de savoir si elle est périodique à partir d'un certain rang...

3 Approcher les nombres réels

Dans cette section, nous allons voir comment le formalisme des fractions continues nous permet d'approcher un nombre réel. La situation est encore meileure : non seulement ce formalisme nous permet d'approcher tout réel, mais en un certain sens que l'on définira, il nous fournit la meilleure approximation.

3.1 Les meilleures approximations

Dans cette section, α dénotera toujours un irrationnel, de telle sorte que la fraction continue qui le représente est infinie, bien que la plupart des résultats sont aussi valides pour les rationnels.

Qu'entend-on par l'approximation d'un réel ? La réponse la plus simple est la suivante : si on se fixe un réel α et une marge d'erreur $\varepsilon > 0$ (qu'il faut imaginer très petite), on cherche la fraction ayant le plus petit dénominateur parmi toutes celles qui vérifient

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \varepsilon.$$

Autrement dit on essaie de trouver une fraction $\frac{p}{q}$ à peu près égale à α (le "à peu près" étant quanditifé par ε) avec le plus petit dénominateur possible. On peut maintenant définir ce qu'on entend par meilleure approximation.

Définition 4. *Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$, une meilleure approximation de α est un rationnel $\frac{a}{b}$ (avec $b > 0$) telle que pour toute autre rationnel $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$ on ait*

$$0 < d \leq b \Longrightarrow |d\alpha - c| > |b\alpha - a|.$$

Cette définition est diffère légérement de l'intuition développée en préambule de cette section : au lieu de chercher $\frac{p}{q}$ telle que $\frac{p}{q} \simeq \alpha$, on cherche $\frac{p}{q}$ telle que $p \simeq q\alpha$. Ce changement est justifié par la puissance du théorème suivant :

Théorème 3. *Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $(\frac{p_k}{q_k})_k$ la suite des réduites de la fraction continue qui le représente. Si $\frac{a}{b}$ est une meilleure approximation de α, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a}{b} = \frac{p_k}{q_k}$.*

Le théorème précédent admet une réciproque partielle :

Théorème 4. *Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $(\frac{p_k}{q_k})_k$ la suite des réduites de la fraction continue qui le représente. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{p_k}{q_k}$ est une meilleure approximation de α, la seule excecption étant*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{2} \quad et \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}.$$

Si on mets ces deux théorèmes bout à bout et si on fait abstraction de l'exception mentionnée, on obtient le résultat suivant : les meilleures approximations d'un réel sont exactement les réduites de sa fractions continues.

3.2 L'ordre d'approximation

Dans la section précédente, on s'est intéressé à minimiser la quantité $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$ par rapport à d'autres quantités du même type (c'est-à-dire avec une autre fraction). Dans cette section, on va s'intéresser à quantifier la petitesse de $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$ de manière "absolue", en la comparant à une fonction décroissante de q_k.

Le Théorème 1, ainsi que la stricte croissance de $(q_k)_k$, nous donne l'estimation suivante :

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2}, \tag{2}$$

où α est un réel quelconque et où $(\frac{p_k}{q_k})_k$ est la suite de ses réduites.

Cet encadrement est valide pour tout réel α et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous allons essayer de répondre à la question suivante : peut-on améliorer cette estimation ? Plus précisément, existe-t-il une fonction f définie sur $\mathbb{N}$ telle que $f(n) < \frac{1}{n^2}$ et telle que

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < f(q_k),$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$?

Cette question est très contraignante et la réponse est négative. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel α et une réduite $\frac{p_k}{q_k}$ tels que

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_k^2}.$$

En effet si on considère le rationnel $\alpha = [0; n, 1, n] = \frac{n+1}{n(n+2)}$, qui a pour première réduite $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{n}$, on a

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{q_1^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

Il suffit donc de choisir n assez grand pour que $\frac{1}{1+\frac{2}{n}} > 1-\varepsilon$ pour obtenir

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_1^2}.$$

Pour espérer obtenir une amélioration de (2), nous devons donc affaiblir nos exigences. On peut par exemple demander que des estimations comme (3.2) soit valide pour tout réel α et pour une infinité de $k \in \mathbb{N}$ (ce qui est très différent de le demander pour *toute* valeur de k). On peut alors démontrer le théorème suivant :

Théorème 5. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ admet une réduite d'ordre $k \geq 2$, alors il existe $j \in \{k-2, k-1, k\}$ tel que*

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_j^2}.$$

Peut-on améliorer la constante $\frac{1}{\sqrt{5}}$, c'est-à-dire en trouver une strictement petite telle que le théorème précédent soit toujours valide ? La réponse est non, et c'est le fameux nombre d'or qui va nous donner un contre-exemple.

Avant de démontrer ce fait, rappelons la définition du nombre d'or. Il est noté φ et est défini comme la racine positive de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

ce qui donne $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le nombre d'or a de nombreuses propriétés, dont une écriture en fraction continue remarquable. En effet, φ vérifie $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. On peut donc remplacer φ dans le membre de droite par $1 + \frac{1}{\varphi}$ pour obtenir

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}.$$

Si on réitère on obtient :

$$\varphi = [1; 1, \dots, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}.$$

Si on note $(\frac{p_k}{q_k})_k$ la suite des réduites de φ, on remarque que la suite $(q_k)_k$ est en fait la suite de Fibonacci, parce que que $q_0 = q_1 = 1$ et $q_{k+2} = q_{k+1} + q_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Au vu de l'expression de φ, on a $r_n = \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que $\varphi = \frac{p_k\varphi + p_{k-1}}{q_k\varphi + q_{k-1}}$ pour $k \geq 1$ (cf Proposition 4). On a alors :

$$\left|\varphi - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k(q_k\varphi + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k^2\left(\varphi + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}$$

Un résultat classique sur la suite de Fibonacci est $\frac{q_{k-1}}{q_k} \longrightarrow \varphi^{-1}$, donc il existe une suite $(\varepsilon_k)_k$ tendant vers 0 telle que $\frac{q_{k-1}}{q_k} = \varphi^{-1} + \varepsilon_k$. Un calcul direct montre que $\varphi + \varphi^{-1} = \sqrt{5}$, ce qui implique

$$\left|\varphi - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2(\sqrt{5} + \varepsilon_k)}$$

Cela montre que quelque soit la constante $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$, le nombre φ vérifie $\left|\varphi - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{c}{q_k^2}$, ce qui montre que le Théorème 5 ne peut pas être amélioré.

Dans le cas général, l'inégalité énoncée dans le Théorème 1 est équivalente à

$$\frac{1}{q_k^2\left(a_{k+1} + 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}}.$$

Comme $0 < \frac{q_{k-1}}{q_k} < 1$, cela implique

$$\frac{1}{q_k^2\,(a_{k+1} + 2)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}}.$$

Cette inégalité nous montre que pour que $\frac{p_k}{q_k}$ soit une bonne approximation de α, il suffit de prendre a_{k+1} très grand (remarquons que p_k et q_k ne dépendent pas de a_{k+1}). Autrement dit, les irrationnels dont les éléments sont grands sont ceux qui s'approchent bien par des fractions. Cela explique pour c'est le nombre d'or qui nous empêche d'améliorer le Théorème 5, c'est en effet l'irrationnel avec les plus petits éléments possibles (uniquement des 1). Le nombre d'or est donc l'irrationnel qui s'approche le moins bien par des fractions, ce qui explique en grande partie ses apparitions spectaculaires et surprenantes dans des phénomènes naturels...

3.3 La conjecture de Duffin-Schaeffer

Pour finir cette partie sur l'approximation des nombres réels, nous allons brièvement évoquer la conjecture de Duffin-Schaeffer, formulée en 1941 par Richard Duffin et Albert Schaeffer, et démontrée pour la première fois en juillet 2019 (!), par James Maynard et Dimitris Koukoulopoulos.

Cette conjecture dépasse largement le cadre de ce texte, mais on peut la formuler ainsi :

Conjecture 1. *Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est telle que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)\frac{\varphi(n)}{n} = +\infty,$$

alors pour presque tout réel α, il existe une infinité d'entiers premiers entre eux p et $q > 0$ tels que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{f(q)}{q}.$$

Quelques clés pour comprendre cet énoncé :

— la fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ est appelée l'indicatrice d'Euler, et $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers inférieurs à n qui sont premiers avec n.

— la condition $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)\frac{\varphi(n)}{n} = +\infty$ peut s'interpréter comme une condition de taille sur la fonction f : pour que cette condition soit vérifiée, la fonction f doit être assez "grosse".

— que signifie "pour presque tout réel α" ? Dans le jargon mathématique, cela signifie que l'ensemble des réels qui ne vérifient pas la conclusion de la conjecture est de "mesure nulle". C'est une notion de théorie de la mesure, qui peut s'interpréter de manière probabiliste : si on choisit un réel au hasard, on a 100% de chances que ce nombre vérifient la conclusion de la conjecture, et donc 0% de chances qu'il ne la vérifie pas. Mais attention, cela ne signifie pas du tout que *tous* les réels vérifient la conclusion : en effet, toujours du point de vue probabiliste, ce n'est pas parce qu'un évènement n'a aucune chance d'arriver qu'il ne peut pas arriver !

La preuve, longue de 45 pages, est encore en cours de relecture...

4 Les nombres algébriques et transcendants

Le formalisme du développement dans une base présente le désavantage de dépendre de la base choisie. Les développements d'un même nombre dans deux bases différentes peuvent présenter des propriétés très différentes, comme par exemple le réel $\frac{1}{3}$, qui s'écrit $0,333333\ldots$ en base 10 et $0,1$ en base 3. A l'inverse, et comme le dit Khinchin, une fraction continue "reproduit dans une forme pure les propriétés du nombre qu'elle représente". C'est une façon de comprendre pourquoi le formalisme des fractions continues est *a priori* le meilleur candidat pour apporter des réponses efficaces à des questions théoriques. Dans cette section, nous allons explorer une de ces questions : celle des nombres transcendants.

Définition 5. *Un réel α est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers, autrement dit s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{Z}^N$ tel que*

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_N\alpha^N = 0.$$

Si α est algébrique, on dit qu'il est de degré $n \in \mathbb{N}^*$ s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers de degré n et s'il n'est racine d'aucun polynômes à coefficients entiers de degrés strictement inférieurs à n.

Un réel α est dit transcendant s'il n'est pas algébrique.

On note Z_n l'ensemble des nombres algébriques de degrés n (remarquons que $\mathbb{Q} = Z_1$). Comme $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ si $i \neq j$, les nombres algébriques de degrés supérieurs à 2 sont irrationnels, ainsi que les nombres transcendants... s'ils existent !

En effet la question de l'existence même des nombres transcendants se pose, et c'est Liouville en 1844 qui le premier prouve qu'ils existent bel et bien, en utilisant la théorie des fractions continues !

C'est ce que nous allons voir dans cette section. Le théorème suivant est souvent appelé théorème de Liouville :

Théorème 6. *Soit $\alpha \in Z_n$ avec $n \geq 2$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fraction $\frac{p}{q}$ (avec $q > 0$), on ait*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}.$$

Ce théorème nous dit qu'un nombre algébrique de degré n ne peut pas être approché par des fractions avec un degré de précision d'ordre plus grand que son degré. Il va aussi nous permettre de construire "à la main" des nombres transcendants.

En effet, le théorème donne une condition nécessaire pour être un irrationnel algébrique de degré n, il suffit donc de trouver un nombre (irrationnel) qui ne vérifie pas cette condition, c'est-à-dire un nombre α vérifiant :

pour toute constante $C > 0$ et pour tout $n \geq 2$, il existe une fraction $\dfrac{p}{q}$ (avec $q > 0$) telle que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{C}{q^n}.$$

Nous allons montrer bien plus : en réalité, le formalisme des fractions continues nous permet de construire des nombres s'approchant de manière *arbitrairement* précise par des rationnels.

Théorème 7. *Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une fonction. Il existe un irrationnel α tel que l'inégalité*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < f(q)$$

ait une infinité de solution $\frac{p}{q}$ (avec $q > 0$).

Corollaire 1. *Les nombres transcendants existent.*

La preuve du Théorème 7 nous montre qu'il y a *beaucoup* de nombres transcendants. Le mathématicien Georg Cantor démontra même en 1878 que l'ensemble des nombres transcendants est en bijection avec $\mathbb{R}$. Comme l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable et que $\mathbb{R}$ ne l'est pas (deux faits démontrés par Cantor en 1874), il y a en fait *infiniment plus* de nombres transcendants que de nombres algébriques. Et pourtant il est très difficile de démontrer la transcendance d'un nombre donné : par exemple, on sait que $e + \pi$ ou $e\pi$ est transcendant, mais on ignore lequel (on sait par contre que e et π sont transcendants)...

C'est une des bizarreries des mathématiques : il est souvent facile de démontrer qu'une propriété est vérifiée par un nombre infini d'objet, mais extrêmement difficile de donner un seul exemple explicite...