Parimaths - Autour de la notion de continuité
Séance du 25/01/2020

Dans cette séance est introduite une définition rigoureuse de la continuité d'une fonction à valeur réelle, ainsi que la notion de borne supérieure. Le but est, d'une part, d'apprendre à écrire une "preuve par epsilon", d'autre part de manipuler les concepts fondamentaux d'analyse réelle qui permettent de formaliser l'intuition de ce qu'est la continuité.
La plupart du contenu provient d'une séance organisée par Luc Lehéricy en avril 2015.

Dans tout le texte, f désigne une fonction à valeurs réelles et $D_f \subset \mathbb{R}$ son ensemble de définition.

Définition 1. *La fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite continue en $x \in D_f$ si plus $y \in D_f$ est proche de x, plus $f(y)$ est proche de $f(x)$. En langage symbolique : f est continue en $x \in D_f$ si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in D_f, \quad |x-y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

f est dite continue sur $A \subset D_f$ si elle est continue en tout point x de A.

Propriétés. Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $f + g$ et $f \times g$ sont continues sur D.
Soit A un ensemble de réels tel que $f(x) \in A$ pour tout $x \in D$, et soit $h : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $h \circ f : x \in D \mapsto h(f(x))$ est continue sur D.

Exercices 1.

1. Montrer les propriétés ci-dessus.
2. Indiquer l'ensemble sur lequel chacune des fonctions suivante est continue :
   — $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x^4 + 2x + 1$
   — $f : x \in \mathbb{Z} \mapsto \mathrm{pgcd}(x, 2^{|x|})$
   — $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, où si $A \subset \mathbb{R}$ $\mathbf{1}_A$ est la fonction valant 1 si $x \in A$, 0 sinon.
3. Les fonctions suivantes sont-elles continues en 0 ?
   — $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$
   — $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$
4. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) < g(x)$. Montrer que $f(y) \leq g(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, mais que l'inégalité n'est pas nécessairement stricte.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Il existe une autre caractérisation utile de la continuité, en terme de convergence de suites.

Propriétés (Caractérisation séquentielle)**.** Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. Si $x \in D_f$, f est continue en x si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Exercice 1.

1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous x, y réels.
2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous x, y réels.
3. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous x, y réels.

On va maintenant justifier qu'une fonction continue est une fonction "dont on peut tracer la courbe représentatrice sans lever le stylo".

Théorème 2 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $a < b$ des réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $c \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$), alors il existe un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = c$.*

Exercices 2.

1. Prouver la caractérisation séquentielle de la continuité, puis prouver le théorème. Commencer par faire un dessin, puis essayer d'obtenir x comme la limite de points d'image par f un peu au dessus ou un peu en dessous de c.
2. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet toujours au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe toujours au moins un $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.
3. Soit $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ continues telle que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe un $x \in [0, 1]$ tel que $g(x) = f(x)$.
4. Un cycliste parcourt 30 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes tel que le cycliste a parcouru 5 km. Existe-t-il toujours un intervalle de temps de 40 minutes durant lequel il aura parcouru 20 km ? Indice : raisonner sur la distance parcourue entre le temps t en minutes et $t + 10$, et tenter d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
5. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, $a < b$. On suppose que f vérifie la propriété suivante : pour tous les points $c < d$ de l'intervalle, il existe e compris entre c et d tel que $f(e) = f(a)$ ou $f(e) = f(b)$. Montrer que f est constante.

Exercice 2. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$, on note $f^{-1}(E)$ l'ensemble des réels x vérifiant $f(x) \in E$. On dira qu'un ensemble A d'entiers naturels (non nécessairement fini) est un support de $\mathbb{R}$ s'il existe une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(\{x\})$ est fini.

— $A = \{\mathrm{Card} f^{-1}(\{x\}) : x \in \mathbb{R}\}$.

1. Les ensembles suivants sont-ils des supports de $\mathbb{R}$? a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{3\}$ d) $\{0, 1, 2\}$ e) $\{0, 1\}$ f) $\{0, 2\}$ g) $\{0, 3\}$ h) $\{0, 2, 4\}$ i) $\{3, 4, 5\}$ j) $\{3, 5, 7\}$ k) $\{2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$ ℓ) $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$ m) $\mathbb{N}$.
2. Montrer que si f est une fonction de support A, et $0 \notin A$, alors soit $\left(\lim_{+\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{-\infty} f = -\infty\right)$, soit $\left(\lim_{+\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{-\infty} f = +\infty\right)$.
3. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\{n\}$ est-il un support de $\mathbb{R}$?
4. (*) Trouver tous les supports de $\mathbb{R}$.

Corrections

Correction Exercice 1.
Une remarque sur l'utilisation de la définition. Pour prouver qu'une fonction est continue sur un domaine A, il faut prouver qu'elle est continue en tout point de A. On commence donc par dire "soit $x \in A$". Ensuite, il faut vérifier que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in [x-\delta; x+\delta]$, $f(y) \in [f(x)-\epsilon; f(x)+\epsilon]$. Pour cela, on prend un $\epsilon > 0$ quelconque, puis on cherche un $\delta > 0$ pour lequel la propriété sera vraie. D'où le raisonnement suivant :

> Soit $x \in A$.
> Soit $\epsilon > 0$.
> Cherchons $\delta > 0$ tel que pour $y \in D_f \cap [x-\delta, y-\delta]$, on ait $f(y) \in [f(x)-\delta, f(x)+\delta]$.

1. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in D$. Par définition, il existe $\delta_f, \delta_g > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} &\forall y \in D, \quad |x-y| \leq \delta_f \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| \leq \epsilon/2 \quad \text{et} \\ &\forall y \in D, \quad |x-y| \leq \delta_g \quad \Rightarrow \quad |g(x)-g(y)| \leq \epsilon/2. \end{aligned}$$

Posons $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\} > 0$. Alors pour chaque $y \in D$ tel que $|x-y| \leq \delta$,

$$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |f(x)-f(y)+g(x)-g(y)| \leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|$$

par inégalité triangulaire. Les deux termes de droite sont chacun plus petits que $\epsilon/2$, donc $f+g$ est continue en $x \in A$, ce quelque soit x, donc est continue sur A.
Cherchons maintenant $\eta > 0$ tel que $(fg)(y) \in [(fg)(y)-\epsilon, (fg)(x)+\epsilon]$ dès que $y \in D \cap [x-\eta, x+\eta]$. Soit $M = \max\{\epsilon, |f(x)|+1, |g(x)|+1\}$. Définissons $\eta_f, \eta_g > 0$ tels que :

$$\forall y \in D, \quad |x-y| \leq \eta_f \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2M},$$

et de même pour η_g en remplaçant f par g. Soit $\eta = \min\{\eta_f, \eta_g\}$. Alors si $y \in D \cap [x-\eta, x+\eta]$,

$$\begin{aligned} |(fg)(x)-(fg)(y)| &= |f(x)(g(x)-g(y)) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)||g(x)-g(y)| + |g(y)||f(x)-f(y)| \\ &\leq (|f(x)|+|g(y)|)\frac{\epsilon}{2M}. \end{aligned}$$

Comme $|f(x)| \leq M$ et $|g(y)-g(x)| \leq \epsilon/(2M)$ donne par inégalité triangulaire $|g(y)| \leq |g(x)| + \frac{\epsilon}{2M} \leq |g(x)|+1$ par définition de M, on obtient bien ϵ dans le terme de droite.

Soit maintenant $x \in D$, f une fonction continue en x et g une fonction continue en $f(x)$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\zeta_g, \zeta_f > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} &z \in A \cap [f(x)-\eta_g, f(x)+\eta_g] \quad \Rightarrow \quad |g(z)-g(f(x))| \leq \epsilon \quad \text{et} \\ &y \in D \cap [x-\zeta_f, x+\zeta_f] \quad \Rightarrow \quad f(y) \in [f(x)-\zeta_g, f(x)+\zeta_g]. \end{aligned}$$

En conséquence, $y \in [x-\zeta_f, x+\zeta_f] \cap A$ entraîne $g(f(y)) \in [g(f(x)-\epsilon, g(f(x))+\epsilon]$.

2. Les polynômes sont une somme de produits des fonctions $x \mapsto a$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto x$, qui sont continues sur $\mathbb{R}$, donc ils sont continus sur $\mathbb{R}$.
   — Si on prend $\delta = 1/2$, l'ensemble $[x-\delta, x+\delta] \cap D_f$ est réduit à un seul point, x, pour lequel l'inégalité est toujours vraie quel que soit $\epsilon > 0$. f est donc continue sur $\mathbb{Z}$.
   — Cette fonction est constante autour de chaque point de son domaine de définition, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Elle ne peut pas être prolongée en 0 à cause du "saut" : quel que soit l'intervalle contenant 0 choisi, il y aura toujours des points où la fonction vaudra 0 et d'autres où elle vaudra 1. On aboutit à une contradiction dans la définition en prenant par exemple $\epsilon = 1/4$. Une autre méthode consiste à utiliser la contraposée de la caractérisation séquentielle : si on trouve deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers x mais telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ont des limites différentes, alors f n'est pas continue en x. Ici, les suites $(u_n) = (1/n)_{n\geq 1}$ et $(v_n) = (-1/n)_{n\geq 1}$ marchent.
   — $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$: tout réel x peut être approché par une suite de rationnels et d'irrationnels (par exemple $u_n = [10^n x]/10^n$ et $v_n = u_n + \sqrt{2}10^{-n}$. Cette propriété permet de conclure que f n'est continue nulle part.
3. — Non : les suites $u_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi-\pi/2}$ contredisent la caractérisation séquentielle.
   — Oui : $|f(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in R$, donc quelle que soit la suite (u_n) qui tend vers 0, $(f(u_n))$ convergera vers $0 = f(0)$. f est donc continue en 0 par caractérisation séquentielle.
4. Soit $y \in \mathbb{R}$, et (y_n) une suite de rationnels convergeant vers y. Alors $f(y_n) < g(y_n)$ pour tout n et, par caractérisation séquentielle, $f(y) \leq g(y)$. L'inégalité n'est pas stricte si l'on prend par exemple f constante égale à 0 et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto |\sqrt{2} - x|$. Alors $f < g$ sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, puisque f et g sont toutes deux nulles en $\sqrt{2}$.
5. f est strictement croissante sur $\mathbb{Q}$ signifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2, \qquad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y).$$

   Supposons par l'absurde que f ne soit pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$: il existe donc deux réels $x < y$ tels que $f(x) \geq f(y)$. On va montrer qu'alors f est constante sur $[x, y]$, ce qui est impossible par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons déjà que $f(x) = f(y)$. Pour cela, il suffit de prendre deux suites $(x_n), (y_n)$ de rationnels convergeant respectivement vers x et y. Pour n assez grand, $x_n < y_n$ donc $f(x_n) < f(y_n)$. Par caractérisation séquentielle, $f(x) \leq f(y)$ d'où l'égalité par hypothèse.
   Si maintenant $a \in]x, y[$ quelconque, on peut faire le même raisonnement en prenant une suite (a_n) de rationnels convergeant vers a : pour n assez grand, $x_n < a_n < y_n$ donc par encadrement et caractérisation séquentielle $f(x) \leq f(a) \leq f(y) = f(x)$. f est donc constante sur $[x, y]$, ce qui est absurde.

Correction Exercice 2.

1. Appliquons la relation à des valeurs particulières. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$
$$f(3x) = f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 3f(x),$$

et par récurrence $f(nx) = nf(x)$ et $f(x/n) = f(x)/n$ pour tout $n > 1$. Il en découle :

$$\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \qquad f(p/q) = \frac{p}{q} f(1)$$

Ainsi, en posant $a = f(1)$, on a montré : $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$. Montrons que cette propriété est également vérifiée sur $\mathbb{R}$ en utilisant la continuité de f. Soit (u_n) une suite de rationnels qui converge vers x. Comme f est continue, $(f(u_n))$ converge vers $f(x)$. Cependant, $(f(u_n)) = (au_n)$ converge aussi vers ax. On en déduit que $f(x) = ax$ par unicité de la limite.
Réciproquement, on vérifie facilement que cette fonction vérifie l'énoncé. Ainsi, les seules fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation sont les fonctions linéaires.

2. Il est possible de reproduire le raisonnement précédent pour cette question. Nous allons utiliser une autre méthode pour se ramener à la question précédente sans refaire les calculs. Soit f une solution. Montrons que soit f est nulle, soit elle ne s'annule jamais.
   Cas 1. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, $f(b) = f(a + (b - a)) = f(a)f(b - a) = 0$. D'où f est nulle. Réciproquement, la fonction nulle est bien une solution.

   Cas 2. Supposons que f ne s'annule jamais. En particulier, f est de signe constant (sinon le théorème des valeurs intermédiaires fournirait un zéro) et comme $f(0) = f(0)^2 \geq 0$, f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction $g = \ln \circ f$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation de la question précédente (puisque ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie, pour tout réels x et y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$). Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = ax$ pour tout $x \in R$. Comme $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$, il vient $f(x) = \exp(ax) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, ces fonctions sont bien solution de l'énoncé (elles sont continues sur $\mathbb{R}$ et vérifient la relation demandée). Les solutions sont donc la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto e^{ax}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

3. Montrons que soit f est nulle, soit elle est constante égale à 1, soit elle est nulle en 0 et non nulle ailleurs.

   Cas 1. Supposons qu'il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) = 0$.. Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$,

   $$f(b) = f(a \times (b/a)) = f(a)f(b/a) = 0.$$

   D'où f est nulle. Réciproquement, la fonction nulle est bien une solution.

   Cas 2. Supposons que $f(0) \neq 0$. Dans ce cas, puisque $f(0) = f(0y) = f(0)f(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, il vient $f(y) = 1$ pour tout réel y, et donc f est constante égale à 1. Réciproquement, la fonction constante égale à 1 est bien une solution.

   Cas 3. Supposons que $f(0) = 0$ et f non nulle. Alors f ne s'annule qu'en 0 par le cas 1. En particulier, f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Comme $f(1) = f(1)^2 > 0$, f est strictement positive sur $\mathbb{R}_*^+$. La fonction $g = \ln \circ f \circ \exp$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, et vérifie $g(x+y) = g(x)+g(y)$ pour tous réels x, y (car $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous réels x et y). Il existe donc un réel a tel que $g(x) = ax$ pour tout réel x,

et donc $f(\exp(x)) = \exp(ax) = (\exp(x))^a$ pour tout x réel, ce qui signifie $f(y) = y^a$ pour tout $y > 0$. Cette formule reste valide pour $y = 0$ à condition que $a > 0$ (les $a \leq 0$ donnent des fonctions non continues en 0).
Il reste à voir ce qui se passe pour $y < 0$. Cela se résout en remarquant deux choses : d'une part,

$$f(-1)^2 = f(1) = 1,$$

d'autre part :

$$f(-x) = f(-1)f(x).$$

On a donc deux cas selon que $f(-1) = 1$ ou $f(-1) = -1$. Dans le premier cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|^a.$$

Dans le second,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x|x|^{a-1}.$$

Réciproquement, ces fonctions sont solutions. Les solutions sont donc la fonction nulle, la fonction constante égale à 1 et les fonctions ci-dessus pour $a > 0$.

Corrigé Exercice 3.

1. Supposons $f(a) < f(b)$. Soit $c \in]f(a), f(b)[$. On cherche à montrer qu'il existe un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = c$.
Soit $s = \sup\{t \in [a; b] : f(t) < c\}$. Cet ensemble est non vide (a est dedans) et majoré par b, donc s est bien défini.
Montrons que s est le point x recherché, i.e. que $f(s) = c$. Par définition du sup, il existe deux suites (u_n) et (v_n) dans $[a; b]$ qui tendent vers s et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
— $u_n \leq s$,
— $v_n \geq s$.
— $f(u_n) < c$
— $f(v_n) \geq c$
Par caractérisation séquentielle, $(f(u_n))$ converge vers $f(s)$, donc $f(s) \leq c$. De même, $(f(v_n))$ converge vers $f(x)$ donc $f(x) \geq c$, d'où l'égalité.
2. On utilise le TVI : soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in [0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Alors $g(0) = f(0) \geq 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, donc g s'annule sur $[0, 1]$, et le point d'annulation est un point fixe de f.
3. D'après le point précédent, f a au moins un point fixe, appelons-le $x \in [0, 1]$. Comme $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$, $g(x)$ est aussi un point fixe de f. Supposons par l'absurde que $g - f > 0$. Alors $g(x) > f(x) = x$. En itérant, $g^{\circ n}(x)$ pour chaque n est un point fixe de f, et $g^{\circ(n+1)}(x) > g^{\circ n}(x)$: la suite $(g^{\circ n}(x))_n$ est croissante, où $g^{\circ n}(x) = g(g(...g(x))...)$ (g apparaît n fois). Comme cette suite est majorée car g est bornée, elle converge. Si ℓ désigne sa limite,

$$f(\ell) = \ell \quad \text{et} \quad g(\ell) = g\Big(\lim_{n\to\infty} g^{\circ n}(\ell)\Big) = \lim_{n\to\infty} g^{\circ(n+1)}(\ell) = \ell,$$

d'où une contradiction.
4. Soit f la fonction représentant la distance parcourue par le cycliste en un temps $t \in [0, 60]$. C'est une fonction continue, $f(0) = 0$ et $f(60) = 30$. On veut trouver

$t \in [0,50]$ tel que $f(t+10) - f(t) = 5$. Soit $g : t \in [0,50] \mapsto f(t+10) - f(t)$. Supposons qu'un tel x n'existe pas. Comme g est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, on doit avoir soit $g > 5$, soit $g < 5$. Dans le premier cas, on trouve :

$$f(60) = f(60) - f(50) + f(50) - f(40) + ... + f(0) > 6 \times 5 = 30,$$

ce qui est absurde. Dans le second cas, on trouve de même $f(60) < 30$. Il existe donc bien un $t \in [0,50]$ tel que le cyclise a parcouru 5 km entre t et $t+10$ minutes.

Dans un intervalle de 40 minutes, le découpage précédent ne fonctionne pas et l'hypothèse devient fausse. On peut en effet imaginer que le cycliste parcoure 15 km pendant les 10 premières minuts, puis se repose pendant 40 minutes et parcoure les 15 derniers kilomètres dans les 10 dernières minutes. En ce cas, sur un intervalle de 40 minutes le cycliste a parcouru au plus 15 km.

5. Soit $c \in [a,b]$, et soit (d_n) une suite de réels de $]a,b[$ tendant vers c par valeurs supérieures. Par hypothèse, pour chaque n, il existe $e_n \in [c, d_n]$ tel que $f(e) \in \{f(a), f(b)\}$.
Par encadrement, la suite e_n converge vers c, donc $f(e_n)$ tend vers $f(c)$. On en déduit que soit $f(a) = f(b)$, soit $f(e_n)$ est constante pour n assez grande par définition de la convergence d'une suite. En particulier, dans tous les cas, $f(c) \in \{f(a), f(b)\}$. Comme $c \in [a,b]$ est quelconque et f est continue, f est constante égale à $f(a)$ sur $[a,b]$.

Elements de correction TFJM.

Le théorème des valeurs intermédiaires et le fait qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée sont nécessaires pour prouver qu'un ensemble n'est pas un support.

— $\{1\}$ est un support de $\mathbb{R}$: $x \mapsto x$ le réalise.

— $\{3\}$ est un support de $\mathbb{R}$: il suffit de prendre la fonction qui vaut 0 en 0 et qui, sur R_+ monte jusqu'à atteindre 1, puis redescend jusqu'à toucher 0, puis monte en 2, redescend en 1, monte en 3, descend en 2, monte en 4, etc, et se comporte en symétrique sur $\mathbb{R}_-$. Ce type de fonction donne tous les supports constitués d'un seul entier impair.

— $\{0,1,2\}$ est réalisé par $x \mapsto x^2$.

— $\{0,1\}$ est réalisé par $x \mapsto \exp(x)$.

— $\{0,3\}$ est réalisé par la fonction qui réalise $\{3\}$ modifiée sur $\mathbb{R}_+$ de façon à ce qu'elle fasse des pas verticaux de plus en plus petits (par exemple entre $1-2^{-n}$ et $1-2^{-(n+1}$, et ne dépasse jamais 1. De même, tous les ensembles constitués de 0 et d'un entier impair sont des supports.

— $\{0,2,4\}$ est réalisé par $x \mapsto x^2 - x^4$.

— $\{3,4,5\}$ et $\{3,5,7\}$ sont réalisés par une modification de la fonction réalisant $\{3\}$, en faisant plus d'un aller-retour entre deux valeurs consécutives pour au moins un des paliers.

— $\{2\}$, et plus généralement les ensembles constitués d'un seul entier pair, ne sont pas des supports. De même pour $\{0,2\}$.