Densité sur $\mathbf{R}$ et sous-groupe de $\mathbf{R}$ et complétude et nombre p-adique

Marc Abboud

11 janvier 2020

1 Topologie sur $\mathbf{R}$

Definition 1.1 – *Un* ouvert *de $\mathbf{R}$ est une partie U de $\mathbf{R}$ telle que U est vide ou bien pour tout x dans $\mathbf{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$.*

– *Une partie A de $\mathbf{R}$ est* dense *si pour tout ouvert non vide U de $\mathbf{R}$, $U \cap A$ est non-vide.*

Exercice 1 *Montrer qu'une partie A de $\mathbf{R}$ est dense si et seulement si pour tout $a,b \in \mathbf{R}, A \cap]a,b[\neq \emptyset$.*

Definition 1.2 *On définit la valeur absolue sur $\mathbf{R}$ ainsi: $|x| = \max(x, -x)$.*

Remark 1.3 *C'est la valeur absolue que vous connaissez, elle mesure la distance entre 2 points de $\mathbf{R}$ (faire un dessin).*

Definition 1.4 – *Une suite réelle est une fonction $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, on notera $u_n := u(n)$.*

– *Une suite* converge *vers un réel l si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$.*

Theorem 1.5 (Théroème des gendarmes) *Soit u,v,w trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ et telle que u,w convergent vers un réel l, alors v converge vers l.*

Remark 1.6 *Pour ce théorème une preuve par dessin suffira.*

Exercice 2 *Montrer que la suite $(1/n)$ tend vers 0.*

Exercice 3 *Montrer que la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.*

Exercice 4 *Montrer que $\mathbf{R}$ privé d'un point est dense dans $\mathbf{R}$. Montrer que $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de points est dense dans $\mathbf{R}$. En fait $\mathbf{R}$ privé d'un nombre dénombrable de points est dense dans $\mathbf{R}$.*

Exercice 5 *Montrer qu'une partie A de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si et seulement si tout élément de $\mathbf{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A.*

Theorem 1.7 $\mathbf{Q}$ *est dense dans $\mathbf{R}$.*

Remark 1.8 *C'est un résultat assez surprenant car on sait que $\mathbf{Q}$ est dénombrable alors que $\mathbf{R}$ non. C'est à dire que $\mathbf{R}$ est infiniment plus grand que $\mathbf{Q}$ mais il permet de l'approcher de manière aussi précise que l'on veut.*

Exercice 6 (Preuve du théroème.)

1. *Par l'exercice 1, il suffit de montrer que tout segment non vide $]a,b[$ contient un rationnel. On suppose $0 < a < b$. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\frac{1}{n} < b - a$.*
2. *(Faire un dessin) Montrer que l'ensemble $\left\{\frac{k}{n} : k > 0\right\}$ intersecte $]a,b[$.*
3. *Conclure.*

Exercice 7 (Autre preuve) *Soit $x \in \mathbf{R}$, on définit la partie entière de x ainsi, $E(x)$ est le plus grand entier plus petit que x c'est à dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$.*

Montrer que la suite $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ converge vers x. (Utiliser le théroème des gendarmes).

Exercice 8 *Montrer que $1_{\mathbf{Q}}$ (indicatrice de $\mathbf{Q}$) n'est continue en aucun point.*

Definition 1.9 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on dit que f est* continue *en $x \in \mathbf{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

On dit que f est continue si elle est continue en chaque point de son domaine de définition.

Exercice 9 *Montrer qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue en x si et seulement si pour toute suite (x_n) qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.*

Montrer qu'une fonction f est continue si pour tout ouvert $U \subset \mathbf{R}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert où $f^{-1}(U) := \{x \in \mathbf{R} : f(x) \in U\}$.

Exercice 10 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x,y \in \mathbf{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est de la forme $f(x) = ax$.*

1. *Montrer que $f(0) = 0$.*
2. *Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{Z}, f(nx) = nf(x)$. En particulier, $f(n) = nf(1)$.*
3. *Montrer que pour tout $r \in \mathbf{Q}$, pour tout $x \in \mathbf{R}, f(rx) = rf(x)$. En particulier, $f(r) = rf(1)$.*
4. *Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe deux suites u_n, v_n rationnelles qui convergent vers x telles que pour tout $n, u_n < x < v_n$.*
5. *Conclure par continuité de f.*

Exercice 11 *Soit A une partie dense de $\mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Montrer que $f(A)$ est dense dans $f(\mathbf{R})$.*

2 Sous-groupe de R

Definition 2.1 *Un groupe (abélien) est un ensemble G avec une loi de multiplication $\cdot$ telle que*

- *(Existence d'un neutre) Il existe $e \in G$, pour tout $g \in G, g \cdot e = e \cdot g = g$.*
- *(Associativité) Pour tout $x,y,z \in G, (xy)z = x(yz)$.*
- *(Existence d'un inverse) Pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $xy = yx = e$.*
- *(Commutativité) Pour tout $x,y \in G, xy = yx$.*

Remark 2.2 *En notation additive, on notera le neutre 0 et l'inverse de x sera noté $-x$.*

Exercice 12 *Montrer que $\mathbf{Z},\mathbf{R},\mathbf{Q}$ avec la loi $+$ sont des groupes. Montrer que $(\mathbf{R}^*, \times)$ est un groupe.*

Definition 2.3 *Soit G un groupe. Un sous-groupe de G est une partie $H \subset G$ telle que*

- *$e \in H$.*
- *Pour tout $x,y \in H, xy \in H$.*
- *Pour tout $x \in H, x^{-1} \in H$.*

Exercice 13 *Montrer que $\mathbf{R}_+^*$ est un sous-groupe de $\mathbf{R}^*$.*

Montrer que $2\mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}, n\mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.

Theorem 2.4 *Les sous-groupes de $\mathbf{Z}$ sont tous de la forme $n\mathbf{Z}$ pour un certain $n \in \mathbf{Z}$.*

Exercice 14 (Preuve) *Soit H un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.*

1. *Soit $n := \min H \cap \mathbf{N}^*$. Montrer que $n\mathbf{Z} \subset H$.*

2. *Supposons qu'il existe $b \in H \setminus n\mathbf{Z}$, montrer que l'on peut supposer b strictement positif. En considérant la division euclidienne de b par n, montrer qu'on prouve l'existence de $c \in H$ avec $0 < c < n$, conclure à une absurdité.*

Passons maintenant aux sous-groupes de $\mathbf{R}$.

Theorem 2.5 *Soit H un sous-groupe de $\mathbf{R}$, on a la dichotomie suivante:*

1. *H est dense dans $\mathbf{R}$.*
2. *H est de la forme $\alpha\mathbf{Z}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.*

Definition 2.6 *Soit X une partie minorée de $\mathbf{R}$, alors on note $\inf X$ le plus grand des minorants de X.*
Soit X une partie majorée de $\mathbf{R}$, on note $\sup X$ le plus petit des majorants de X.

Example 2.7 $\inf]0{,}2[= 0, \inf [0{,}2[= 0, \inf \{1/n : n \in \mathbf{N}^*\} = 0$

Exercice 15 *Soit X une partie minorée de $\mathbf{R}$ et $a = \inf X$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $a < x < a + \varepsilon$. En déduire qu'il existe une suite de X qui converge vers $\inf X$.*

Exercice 16 *Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction bornée. Montrer que*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left(\inf_{y \in \mathbf{R}} f(x,y) \right) = \inf_{y \in \mathbf{R}} \left(\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x,y) \right)$$

Exercice 17 (Preuve) 1. *Montrer que si H est de la forme $\alpha\mathbf{Z}$ alors H n'est pas dense dans $\mathbf{R}$.*

2. *Supposons maintenant que H n'est pas dense dans $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $a < 0 < b$ tel que $]a,b[\cap H = \{0\}$.*
3. *Soit $\alpha = \inf H \cap \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $\alpha > 0$ et que $\alpha \in H$.*
4. *Avec la même idée que la preuve pour $\mathbf{Z}$, montrer que $H = \alpha\mathbf{Z}$.*

Corollary 2.8 $\mathbf{Q}$ *est dense dans* $\mathbf{R}$.

Exercice 18 *Soit $H = a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ avec $b \neq 0$ un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Montrer que H est dense dans $\mathbf{R}$ si et seulement si a/b est irrationnel.*

1. *Si H est de la forme $\alpha\mathbf{Z}$, montrer que a/b est rationnel.*
2. *Réciproquement, il existe deux entiers p,q premiers entre eux tels que $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$. On pose $\alpha = \frac{a}{p = \frac{b}{q}}$, montrer que H est contenu dans $\alpha\mathbf{Z}$.*
3. *Utiliser le théroème de Bézout pour conclure que $a \in H$ et conclure le résultat.*

En déduire que $\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$, en déduire que $\{\sin(n) : n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $[-1{,}1]$.

3 Complétude

On aimerait pouvoir montrer qu'une suite est convergente sans pour autant avoir à trouve sa limite. On a ce résultat que les terminales connaissent.

Proposition 3.1 *Toute suite réelle majorée croissante est convergente.*

Mais c'est à peu près tout. Il existe en réalité une autre notion qui est l'outil principal pour montrer qu'une suite est convergente sans avoir à trouver sa limite.

Definition 3.2 (Suite de Cauchy) *Soit u une suite réelle, on dit que u est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N > 0$ tel que pour tout $n,m > N, |u_n - u_m| < \varepsilon$.*

Remark 3.3 *Faire un dessin pour bien comprendre la définition.*

Exercice 19 *Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.*

Theorem 3.4 *Toute suite de Cauchy est une suite convergente. On dit que* $\mathbf{R}$ *est un espace complet.*

Definition 3.5 *Soit* X *un espace. Une distance sur* X *est une application* $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ *telle que*

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $d(x,y) = d(y,x)$.
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Un espace munie d'une distance est appelé un espace métrique.

Exercice 20 *Montrer que la valeur absolue sur* $\mathbf{R}$ *est une distance.*

Definition 3.6 *Soit* X *un espace métrique. Une suite* u *de* X *converge vers un élément* $l \in X$ *si la suite rélle* $d(u_n,l)$ *converge vers* 0.

Exercice 21 *Soit* X *un ensemble, on considère sur* X *la distance suivante:* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *et* $d(x,y) = 1$ *sinon. Montrer que c'est une distance.*

Caractériser les suites convergentes pour cette distance.

Definition 3.7 *Soit* X *un espace métrique et* u *une suite de* X. u *est de cauchy si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un rang* N *tel que pour tout* $n,m > N, d(u_n,u_m) < \varepsilon$.

On dit que X *est un espace complet si les suites de Cauchy sont convergentes.*

Exercice 22 *Montrer que* $\mathbf{Q}$ *n'est pas complet.*

Theorem 3.8 *Pour tout espace métrique* X*, il existe un espace métrique complet* Y *contenant* X *tel que* X *est dense dans* Y.

Exercice 23 (Preuve) *On fera seulement la preuve pour* $X = \mathbf{Q}$ *et on va en fait construire* $\mathbf{R}$*. On pose* $\mathbf{R}$ *comme l'ensemble des suites de Cauchy rationnelles modulo la relation d'équivalence* $u \simeq v \Leftrightarrow u - v$ *tend vers* 0*. Les éléments de* $\mathbf{Q}$ *sont alors les suites constantes rationnelles (ou plutôt leur classe).*

On définit $\mathbf{R}_+$ *comme l'ensemble des classes d'equivalences de suite dont au moins un élément dans la classe est une suite positive rationnelle. On peut donc définir une ordre sur* $\mathbf{R}$*, on a* $U \leq V \Leftrightarrow V - U \leq 0$.

- *Montrer que l'ensemble des rationnels est dense dans* $\mathbf{R}$.
- *Montrer que* $\mathbf{R}$ *est complet.*

4 Distance ultramétrique et nombre p-adique

Definition 4.1 *Soit* X *un espace, on dit que* $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ *est une distance ultramétrique si c'est un distance telle que* $d(x,z) \leq \max(d(x,y),d(y,z))$

Remark 4.2 *Les espaces munies de distance ultramétriques ont une géométrie très bizarre.*

Exercice 24 *Soit* X *un espace ultramétrique et soit* $D \subset X$ *un disque de* X*. Montrer que tout point de* D *est un centre de* D.

Definition 4.3 *Soit* A *un anneau, une valuation sur* A *est une application* v *telle que*

- $v(0) = +\infty, v(1) = 1$
- $v(xy) = v(x) + v(y)$.
- $v(x + y) \geq \min(v(x),v(y))$.

Exercice 25 *Soit* $A = \mathbf{Z}$*, montrer que toutes les valuations* p*-adiques pour* p *premier sont des valuations. Montrer que l'on peut les étendre à des valuations sur* $\mathbf{Q}$.

Exercice 26 *Montrer que la valeur absolue définie par* $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ *définit une distance ultramétrique sur* $\mathbf{Z}$ *et sur* $\mathbf{Q}$.

Remark 4.4 *Avec la norme p-adique, la suite* p^n *tend vers* 0*....*

Definition 4.5 *On définit* $\mathbf{Z}_p$ *comme le complété de* $\mathbf{Z}$ *pour la norme p-adique. C'est aussi un anneau. On peut montrer que* $\mathbf{Z}_p$ *est l'ensemble des nombres infinis écrit en base p. C'est à dire qu'un élément a de* $\mathbf{Z}_p$ *est de la forme*

$$a = \cdots a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0, \quad (0 \leq a_i \leq p-1$$

Avec les règles de multiplication et d'addition que l'on connait pour les nombres de taille finie.

La valuation p-adique de a se lit comme $v_p(a) = \max\{k \geq 0 : \forall i \leq k, a_i = 0\}$.

Exercice 27 *On considère A un arbre binaire complet infini. C'est à dire que A a une racine et que chaque noeud a exactement 2 enfants. Soit X l'ensemble des branches (infinies de A), on définit v de la manière suivante: Soit 2 branches* b,b'*, il existe une branche finie* $b \cap b'$*, on appelle t le dernier noeud de* $b \cap b'$ *et on pose* $d(b,b') =$ *la profondeur de t dans l'arbre.*

Montrer que X est en fait $\mathbf{Z}^2$*, que* 0 *correspond à la branche où l'on va toujours à gauche et que d correspond à la distance 2-adique.*