

(Presque) tous les chemins mènent à Rome

Nicolas Fabiano

19 janvier 2019

1 Marche aléatoire symétrique sur un segment

1.1 Qui gagne ?

En admettant que l'un des joueurs va nécessairement gagner, retrouver la probabilité de gain de chaque joueur en utilisant l'espérance.

1.2 En combien de temps ?

Alice et Bob jouent à pile ou face. Alice commence avec une pièce et Bob avec $n - 1$. Bob est gentil : si Alice est ruinée, il lui donne une pièce et le jeu continue. Alice est-elle certaine de finir par ruiner Bob ? Si oui, en combien de coups en moyenne ?

2 Marché aléatoire symétrique sur un droite

2.1 Probabilité de retour à l'origine en n étapes

2.2 Nombre moyen de retours à l'origine

2.3 Hypothèse : retour à l'origine avec probabilité $p < 1$

2.4 Conclusion

Montrer que (presque sûrement) l'on repasse par l'origine non seulement une fois, mais une infinité de fois.

Montrer que (presque sûrement), en partant de n'importe quel n , on finira par passer par l'origine.

(*) Montrer (rigoureusement) que le temps moyen de retour en 0 est infini.

3 Marche aléatoire symétrique...

3.1 ... sur le plan

3.2 ... dans l'espace

Pour le nombre moyen de retours à l'origine, on obtient environ 0,393203974. Calculer la probabilité de retour à l'origine.

4 Premier retour à l'origine

$2n$ clients font la queue pour aller au cinéma, dont l'entrée coûte 5\$. La moitié a un billet de 5\$ et l'autre un billet de 10\$, mais les clients sont arrivés dans un ordre aléatoire. Quelle est la probabilité que personne n'ait à attendre qu'on lui rende la monnaie? (la caisse est initialement vide)

Quelle est la probabilité d'atteindre la valeur k pour la première fois après n étapes?

Quelle est l'espérance du temps nécessaire pour atteindre k ?

5 Marche aléatoire asymétrique

5.1 Sur un segment

Alice va au casino avec 10\$, ne partira pas avant d'avoir 20\$ (ou d'être ruinée). Elle joue à la roulette, où sa probabilité de gagner est de $\frac{18}{37}$. Quelle est sa probabilité de repartir avec 20\$ si :

— elle parie tout d'un coup?

— elle parie 1\$ par 1\$?

(*) Globalement, quelle est la meilleure stratégie? (indice : utiliser l'espérance)

(*) Quel est le temps moyen avant d'être absorbé?

5.2 Sur une droite

Quel est l'espérance du nombre de retours à l'origine?

(**) Quel est la probabilité de revenir à l'origine pour la première fois après n étapes?

(**) Quelle est l'espérance du temps nécessaire pour atteindre k ?