Séance Parimath - Sommes et séries [*]

Sylvain Wolf

Samedi 13 octobre 2018

L'objectif de cette séance est double. Dans un premier temps, nous cherchons à nous familiariser avec la notion de somme, et en particulier avec l'utilisation du symbole $\sum$. En effet, bien que la notion de somme soit assez intuitive, l'utilisation du symbole abstrait $\sum$ peut rendre certains calculs délicats. Nous présentons d'abord les principales règles de calcul liées au symbole $\sum$. Nous donnons ensuite quelques techniques de simplification de sommes et calculons des sommes classiques qu'il est indispensable de connaître. Cette première partie sera principalement centrée autour d'exercices.

Dans un second temps, nous nous intéressons à la notion de série, qui est en fait une généralisation des sommes finies à un nombre infini de termes. Nous serons d'emblée confrontés à la question suivante : comment donner un sens à une somme infinie ? Nous répondrons à cette question par l'introduction de la notion de limite. Nous motiverons l'étude des séries par l'étude du célèbre paradoxe de Zénon. Si le temps le permet, nous donnerons enfin un développement de π en série.

Table des matières

⚠Les exercices marqués par une étoile (*) sont **classiques**.

[*] Ces notes de cours sont relativement condensées, et à diluer autant que nécessaire...

1 Sommes et symbole $\sum$

1.1 Définitions et premières propriétés

Nous cherchons à définir un *symbole de sommation* capable d'exprimer la sommation de n termes (que l'on peut penser réels ou complexes) quelconques, avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque également.

Définition 1. *Soient $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$. On note*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

la somme des n réels $x_1, x_2, x_3, \cdots$ et x_n.

L'indice i fait référence au "rang" de sommation. On somme le premier nombre ($i = 1$) puis le second ($i = 2$), etc... La lettre i pourrait donc être remplacée par n'importe quelle lettre de l'alphabet[1]. On qualifie i de ***variable muette****. Formellement, on a*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Le fait que l'indice de sommation des sommes ci-dessus commence par 1 résulte d'un choix dépendant du contexte. Il serait tout à fait autorisé de le faire commencer par 0 ou même à -1 ou 2.

À titre d'exemple, on peut donner les deux égalités suivantes

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

où x_1, x_2, x_3 et x_4 sont des réels.

Remarquons que le symbole $\sum$ est surtout utile lorsque l'on veut calculer la somme de n termes, sans préciser la valeur de n. Notons que l'on pourrait remplacer le symbole $\sum$ par les symboles $+$ et $\cdots$, mais cela rendrait les calculs rapidement illisibles.

Convention On adoptera dans toute la suite la convention suivante :

$$\sum_{i=p}^{n} x_i = 0 \text{ si } p > n.$$

On parle de somme vide. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^{-1} i = 1, \quad \text{mais} \quad \sum_{-1}^{1} = -1 + 0 + 1 = 0.$$

Exercice 1. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} a$, où a est un nombre réel,
2. $\sum_{j=0}^{5} (j+1)$,
3. $\sum_{i=4}^{4} i^2$,
4. $\sum_{i=1}^{n} x_j$ où $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Remplacer le symbole $\sum$ par le symbole $\cdots$ dans les expressions suivantes

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} x_k$$

1. On utilise cependant souvent les lettres i, j, k et l.

où $n,p \in \mathbb{N}^*$, $p < n$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$.

Remarque 1. Dans certains cas, on peut être amené à regarder des sommes dont les indices de sommation ne sont pas consécutifs dans $\mathbb{Z}$. On peut alors préciser sous le symbole $\sum$ les indices qui sont sommés. Par exemple, si $x_1, \cdots, x_n$ sont des réels,

$$\sum_{k=1,\ k \text{ pair}}^{n} x_k$$

désigne la somme des x_k d'indice pair.

Plus généralement, si $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite réelle et si I est une sous-partie **finie** de $\mathbb{Z}$, la notation abstraite $\sum_{i\in I} x_i$ désigne la somme de tous les x_i avec $i \in I$ (on peut penser dans un premier temps que l'on a ordonné I, qui est donc de la forme $I = \{p_1, ..., p_n\}$ et alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i=1}^n x_{p_i}$).

Propriétés de la somme exprimées avec le symboles $\sum$:

— (linéarité) Si $x_1, \cdots, x_n$ et $y_1, \cdots, y_n$ sont respectivement n réels avec $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

— (factorisation) Si $x_1, \cdots, x_n$ sont n réels avec $n \in \mathbb{N}^*$ et si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} a x_i = a \times \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

— (développement) Si $x_1, \cdots, x_n$ et $y_1, \cdots, y_m$ sont respectivement n et m réels avec $n, m \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i y_j = \sum_{i\in\{1,\cdots,n\},\ j\in\{1,\cdots,m\}} x_i y_j = .$$

Exercice 3. Soient $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 = n$. Montrer que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $x_k = 1$.

1.2 Sommes classiques

Exercice 4*. (somme triangulaire) On souhaite dans cet exercice calculer de différentes manières la somme $S_n := \sum_{k=0}^n k$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer S_1, S_5 et S_7.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n(n+1)/2$. On pourra consulter l'annexe pour des rappels sur le raisonnement par récurrence.
3. Proposer une explication géométrique de la formule précédente.
4. Après avoir constaté que S_n est la somme des termes d'une suite arithmétique que l'on explicitera, proposer une nouvelle preuve de la formule $S_n = n(n+1)/2$.
5. Calculer $\sum_{k=p}^n k$, $p \leq n$.

Exercice 5*. (somme des carrés)

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la formule

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6. Proposer une preuve directe de ce résultat.
2. Trouver un polynôme P de degré trois tel que $P(x+1) - P(x) = x^2$. Retrouver la valeur de $\sum_{k=0}^n k^2$.

Exercice 6*. (somme tétraédrique) On note $S_k := 1 + 2 + \cdots + k$ et $T_n := S_1 + \cdots + S_n$.

1. Exprimer T_n en fonction de la somme des n premiers entiers et des n premiers carrés.
2. À l'aide de l'exercice précédent, calculer T_n. Pourquoi parle-t-on de nombres tétraédriques ?
3. Exprimer les nombres tétraédriques en fonction d'un coefficient binomial.

Exercice 7*. (somme des cubes) L'objectif de cet exercice est de calculer de plusieurs manières la somme des n premiers cubes.

1. Calculer cette somme pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. Comparer avec les résultats de l'exercice 4. Que constate-t-on ?
2. Montrer par récurrence la formule intuitée précédemment.
3. En utilisant un raisonnement géométrique (s'aider éventuellement de l'exercice 4), calculer la somme des n premiers cubes.
4. Proposer enfin une dernière méthode de calcul utilisant des polynômes.

Exercice 8*. (formule du binôme de Newton).

Définition 2. *On rappelle que si $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$. Par convention, $0! = 1$. Si $k \in \{0, ..., n\}$, on note $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial k parmi n.*

1. Donner une interprétation combinatoire du coefficient binomial ci-dessus.
2. Montrer que
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$
3. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$
4. Calculer les sommes
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

1.3 Quelques techniques de simplification de sommes

Nous étudions dans cette section quelques méthodes pour calculer des sommes.

1.3.1 Changement d'indice

Principe. On veut remplacer l'indice de sommation initial par un autre indice de sommation permettant de simplifier la somme étudiée (ou de se ramener à une somme connue). Par exemple, si on souhaite calculer la somme

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1) - \sum_{i=1}^{n} i,$$

il est tentant de remplacer $i + 1$ par i. Pour cela, on se base sur le résultat suivant

Proposition 3. *Si I et J sont deux ensembles (finis et de même taille) d'indices et f est une application de I dans J tel que tout indice J admette un unique antécédent dans I par f, alors*

$$\forall (x_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^{|J|}, \quad \sum_{j \in J} x_j = \sum_{i \in I} x_{f(i)}.$$

Il est clair que la définition ci-dessus est difficilement compréhensible. On va donc voir comment en pratique appliquer le résultat précédent. On revient à l'exemple précédent : $\sum_{i=1}^{n} (i+1)$. On a envie de poser $j = i + 1$ et donc $i = j - 1$. Puisque i variait entre 1 et n, j va varier entre 2 et $n + 1$. Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1) = \sum_{j=2}^{n+1} j.$$

Formellement, on a appliqué la proposition précédente à $I = \{1, .., n\}$, $J = \{2, ..., n+1\}$ et $f : i \mapsto j(i) = i + 1$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1) - \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=2}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{n} i = (n+1) - 1 = n.$$

Exercice 9*. (Changement d'indice sur un triangle) Soient $x_{i,j}$ des réels indexés par deux indices i et j. Intervertir, en s'aidant d'un triangle, la double somme

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}.$$

Calculer cette somme si $x_{i,j} = j$.

1.3.2 Télescopage

La méthode par télescopage est basée sur le fait suivant

Fait 4. *Pour tous* $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = x_n - x_1.$$

Démonstration. Il suffit de séparer les sommes en deux et de faire le changement d'indice $j = i + 1$ dans la première somme. Il ne reste que les termes extrémaux. □

Il est très fréquent de croiser des sommes télescopiques lors de la résolution d'exercices. L'exemple le plus frappant est sûrement l'exemple des suites géométriques, voir la seconde partie du cours.

Exercice 10*. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k^4$. On pourra s'inspirer de la partie précédente.

Exercice 11*. Calculer les sommes

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)(i+1)}.$$

1.3.3 Transformation d'Abel

La **transformation d'Abel** est une manipulation permettant de transférer une somme d'un terme à l'autre d'un produit. Cette opération est basée sur l'opération de télescopage donnée ci-dessus. Nous découvrons la transformation d'Abel au travers de l'exercice suivant.

Exercice 12.

1. * Soient $a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$. On pose

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

   Transformer la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ en fonction de b_{k+1}, b_k et A_k pour $k \in \{1, ..., n\}$.

2. Déduire du calcul précédent la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k k.$$

   On prouvera d'abord que $\sum_{k=0}^{p} 2^k = 2^{p+1} - 1$, en remarquant que $2 - 1 = 1$ et en utilisant une somme télescopique.

1.4 Exercices

Exercice 13. Proposer une méthode graphique pour calculer $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$. Retrouver le résultat avec l'exercice 2.

Exercice 14. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n := \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

Exercice 15. Calculer les sommes suivantes. On désigne par $[x]$ la partie entière (inférieure) du réel x et l'on précise que les calculs ne sont pas rangés par ordre de difficulté.

$$1)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \quad ; \quad 2)\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \min(i,j) \quad ; \quad 3)\ \sum_{i=1}^{n} \frac{5 \times 2^i}{3^{i+1}} \quad ; \quad 4)\ \sum_{i=0}^{n} i(i+2) \quad ; \quad 5)\ \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2-1}$$

$$6)\ \sum_{1 \le i \le j \le n} j \quad ; \quad 7)\ \sum_{i=0}^{2n-1} [i/2] \quad ; \quad 8)\ \sum_{j=0}^{n} (n-j)^2 \quad ; \quad 9)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \quad ; \quad 10)\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} (i+j).$$

2 Une introduction aux séries

Nous nous intéressons maintenant à la généralisation d'une somme à un nombre infini de termes : les séries. L'étude des séries peut être motivée historiquement par le paradoxe de Zénon, que nous présentons dans la suite de ce travail. Nous regarderons également un exemple particulier de séries : les séries à termes alternées. Ces séries nous donneront un développement de π..

2.1 Rappels sur les suites

Définition 5. — *Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note en général u_n le réel $u(n)$ (i.e le n-ème terme de la suite u). On note la suite u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
— *Une suite est dite positive si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n) \geq 0$. Une suite est dite alternée si $u(n)$ est du signe de $(-1)^n$. En particulier, une suite alternée vérifie $u_n = (-1)^n|u_n|$.*
— *Une suite est dite croissante (décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1) \geq u(n)$ $(u(n+1) \leq u(n))$.*
— *Une suite u est dite majorée (minorée) s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ $(u_n \geq M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Par exemple, la suite définie par $u_n := (-1)^n/(n+1)$ est alternée. Elle n'est ni croissante, ni décroissante. En revanche, la suite $(|u_n|_{n\in\mathbb{N}})$ est décroissante.

Définition 6. *Soit u une suite réelle. On dit que u converge vers $L \in \mathbb{R}$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \epsilon.$$

On dit que u diverge vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n > A.$$

Par exemple, la suite définie par $u_n := 1/(n+1)$ converge vers 0. En effet, soit $\epsilon > 0$. On pose $N = [1/\epsilon] + 1$ où $[x]$ désigne la partie entière de x. Pour tout $n > N$, $u_n = 1/(n+1) \leq 1/N \leq \epsilon$.

On montre maintenant le théorème fondamental dit des suites monotones.

Théorème 7 (Théorème des suites monotones)**.** *Si u est une suite réelle croissante et majorée, alors u converge.*

Démonstration. Soit $L := \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ le suprémum (bien défini car u est majorée) des valeurs prises par u. Par définition, L est le plus petit des réels A vérifiant $u_n \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L. Soit $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq L - \epsilon$. En effet, si tel n'était pas le cas, alors $u_n \leq L - \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec la définition de L.

Par croissance de u, on obtient que $u_n \geq u_N \geq L - \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Puisque $u_n \leq L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient finalement que $L - \epsilon \leq u_n \leq L$ pour tout $n \geq N$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, u converge vers L. ☐

Remarquons que le théorème des suites monotones s'applique aussi aux suites décroissantes et minorées.

2.2 Séries géométriques et paradoxe de Zénon

Définition 8 (Suites géométriques)**.** *Soit $\rho \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison ρ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \rho u_n$. On voit facilement par récurrence que $u_n = u_0\rho^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Fait 9 (Somme des termes d'une suite géométrique)**.** *Soit u une suite géométrique de raison $\rho \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}.$$

Démonstration. On rappelle d'abord que $u_k = u_0\rho^k$. On calcule maintenant $(1-\rho)(u_0 + \cdots + u_n)$:

$$(1-\rho)(u_0 + ... + u_n) = u_0(1-\rho)(1+\rho+\rho^2+...+\rho^n) = u_0\left(\sum_{k=0}^{n}\rho^k - \sum_{k=0}^{n}\rho^{k+1}\right) = u_0(1-\rho^{n+1})$$

après changement d'indice et somme télescopique. Cela implique le résultat. □

Proposition 10 (Convergence)**.** *Soit $|\rho| < 1$. On a $\lim_{n\to+\infty} \rho^n = 0$.*

Démonstration. Soit $a \geq 0$. On montre d'abord par récurrence que $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est bien entendu vrai pour $n = 0$. Soit n fixé tel que $(1+a)^n \geq 1 + na$. On a

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a,$$

ce qui valide la récurrence. Maintenant, si $|\rho| < 1$, on pose $1 + a = 1/|\rho| > 1$. On a alors $1/|\rho|^n \geq 1 + n(1/|\rho| - 1)$. Par comparaison, cela implique que $1/|\rho|^n$ diverge vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Cela permet de conclure. □

On peut maintenant passer à la théorie des séries. On définit d'abord la notion de série convergente.

Définition 11. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série de terme général u_n est convergente si la suite (S_n) est convergente. On note alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite (S_n).*

De la définition précédente, on déduit qu'une condition nécessaire pour que (S_n) converge est que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Cette condition n'est pas suffisante (voir exercice 18).

Une série non convergente est dite divergente. Il y a essentiellement deux façons de diverger : tendre vers $\pm\infty$ ou ne pas se stabiliser autour d'une valeur.

Proposition 12. *Soit u une suite géométrique de raison ρ avec $|\rho| < 1$. La série de terme général u_n est convergente. De plus, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1/(1-\rho)$.*

Démonstration. Par les résultats précédents. □

On peut maintenant étudier le classique paradoxe de Zénon (ou "Achille et la tortue"). Achille et une tortue sont séparés d'une distance $d = 10m > 0$. Achille se déplace à la vitesse v tandis que la tortue se déplace à une vitesse bien inférieure, disons $v/10$. Le problème de Zénon exprime la chose suivante : Achille se déplace plus rapidement que la tortue donc la rattrapera en un temps $t_1 = d/v$. Mais pendant ce temps, la tortue aura avancé d'une distance $d_1 = vt_1/10 = d/10$. Pour rattraper la tortue, Achille aura besoin d'une durée $t_2 = d_1/v$. La tortue aura pendant ce temps avancé... Etc !

Achille mettra-t-il alors un temps infini à rejoindre la tortue ? Eh bien non ! Et la théorie mathématique mise au point ci-dessus peut nous aider à prouver ce résultat.

Si t_n désigne le temps nécessaire pour qu'Achille rejoigne la tortue à l'étape n, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = d_n/v = d/(10^n v) = \alpha/10^n$ avec $\alpha = d/v$. Ainsi, la suite (t_n) est une suite géométrique de raison $1/10 \in [0, 1[$: la série de terme général t_n est convergente. Il n'y a donc pas de contradiction. En un temps $t_\infty = \frac{10d}{9v}$, Achille aura rattrapé la tortue.

Exercice 16. Calculer $0,99999.....$ et $1,1111.....$

Indication : on pourra écrire 0,9999999... comme somme des termes d'une suite géométrique.

2.3 Séries à termes positifs

Nous donnons dans cette section quelques méthodes pour déterminer la convergence d'une série. On se ramène souvent aux séries à termes positifs par le résultat suivant :

Théorème 13. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ est convergente. On dit que **l'absolue convergence** implique la convergence.*

Démonstration. On rappelle le critère de Cauchy suivant : soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement, si $\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n,m\geq N, |v_n-v_m|\leq\epsilon$. On dit que $\mathbb{R}$ est un espace complet.

Soit donc $\epsilon>0$. Puisque $\sum_{k=n}^{+\infty}|u_k|\to 0$ quand $n\to+\infty$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tous $m>n\geq N$, $\sum_{k=n}^{m}|u_k|\leq\epsilon$. Il ne reste plus qu'à appliquer le critère de Cauchy à $\sum_{k=n}^{m}u_k$ à l'aide de l'inégalité triangulaire. □

On donne maintenant les théorèmes de comparaison suivants :

Théorème 14.
- *Soit (u_n) une suite réelle **positive**. Si la suite (S_n) est majorée, alors la série de terme général u_n est convergente.*
- *Soient (u_n) et (v_n) deux suites **positives** tel que $u_n\leq v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si la série de terme général (v_n) est convergente, alors la série de terme général (u_n) est convergente.*

Démonstration. Il suffit de constater (dans les deux cas), que la suite des sommes partielles (S_n) est croissante et majorée, donc convergente. □

Exercice 17*. (étude de la série de terme général $1/n^2$). Montrer que la série de terme général $u_n=1/n^2$, $n\geq 1$ est convergente.

Indication : on pourra comparer $1/n^2$ à $1/(n(n-1))$ et utiliser une somme télescopique.

Exercice 18*. (série harmonique) Soit $H_n:=\sum_{k=1}^{n}1/k$. Après avoir montré que $H_{2n}-H_n\geq 1/2$ pour tout n, étudier la convergence de (H_n).

Exercice 19*. (règle de d'Alembert) Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to L<1$. Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

En déduire la convergence de la série de terme général $u_n=x^n/n!$ avec $x\in\mathbb{R}_*^+$.

2.4 Séries alternées et développement de π

On propose dans cette section de s'intéresser à une classe particulière de séries : les séries à termes alternés. On montre d'abord le théorème suivant :

Théorème 15 (Théorème des séries alternées)**.** *Soit (u_n) une suite alternée. On suppose que $(|u_n|)$ décroît vers 0 quand $n\to+\infty$. Alors la série de terme général (u_n) est convergente. Par ailleurs, le reste $R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}u_k$ vérifie $|R_n|\leq u_{n+1}$.*

Démonstration. On note S_n la somme partielle associée à u_n. On pose $v_n=S_{2n}$ et $w_n=S_{2n+1}$. On constate que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n\leq v_n$. Par ailleurs, par décroissance de $(|u_n|)$, (w_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante. On en déduit alors l'encadrement $w_0\leq w_n\leq v_n\leq v_0$ et, par le théorème des suites monotones, la convergence de v et w vers S et S' respectivement. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n-v_n)=0$, $S=S'$. Ainsi, S_n converge vers S ce qui prouve la première partie du théorème.

Pour la seconde, on constate simplement que $w_n\leq S\leq v_n$. Ainsi, $-|u_{2n}|\leq-|u_{2n+1}|=w_n-v_n\leq S-v_n\leq 0$ et $0\leq S-w_n\leq v_n-w_n=|u_{2n+1}|$. □

On propose maintenant un développement en série (alternée) de π. On rappelle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est défini comme l'unique réel $y\in]-\pi/2,\pi/2[$ tel que $x=\tan(y)$. La fonction arctan est dérivable et sa dérivée est, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\arctan'(x)=1/(1+x^2)$.

Or, par la partie précédente, pour tout $x\in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n},$$

où la convergence de la série de droite est garantie par la théorie des séries géométriques. On **admet** que l'on peut remonter à l'expression de $\arctan x$ de la manière suivante (on fait en fait l'inverse de la dérivation terme à terme) :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

La théorème des séries alternées affirme que la série de terme général $(-1)^n/(2n+1)$ est convergente. Par des arguments d'analyse (trop poussés mais concevables...), on peut passer à la limite quand $x \to 1^-$ dans l'expression ci-dessus. On trouve alors (formule de Leibniz)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots.$$

Le théorème des séries alternées permet de contrôler le reste R_n par $1/(2n+3)$.

2.5 Exercices

Exercice 19. Étudier la convergence de la série de terme général $\cos(n)/n$. On pourra utiliser une transformation d'Abel.

Exercice 20. Étudier la convergence des séries de terme général suivant :
1. $u_n = (2/3)^n/n$.
2. $u_n = n/(n+1)$.
3. $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.
4. $u_n = 1/\sqrt{n+1}$.

A Faire une récurrence

On présente ici une méthode essentielle pour prouver qu'une propriété P_n est vraie pour tous les entiers naturels (ou du moins à partir d'un certain entier naturel n_0). Il s'agit du raisonnement par récurrence. Il se décompose en trois étapes :
- L'initialisation : on vérifie que la propriété P_n est vraie au rang initial (classiquement au rang zéro).
- L'hérédité : on vérifie que **si** la propriété P_n est vraie à un certain rang n quelconque fixé (c'est l'hypothèse de récurrence) **alors** elle est vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Explication : l'initialisation dit que la propriété est vraie au rang 0. En appliquant l'hérédité à $n = 0$, on obtient que la propriété est vraie au rang $n+1 = 1$. En appliquant l'hérédité à $n = 1$, on obtient la propriété au rang 2. Et ainsi de suite...

Exemple. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq n$. Pour n entier naturel, on note P_n la propriété "$n^2 \geq n$". Il s'agit de montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Initialisation : montrons que P_0 est vraie ; c'est évident car $0^2 \geq 0$.
- Hérédité : supposons qu'à un certain rang $n \geq 0$ fixé et quelconque, P_n soit vraie *i.e* $n^2 \geq n$. Montrons qu'alors P_{n+1} est vraie *i.e* $(n+1)^2 \geq n+1$. On calcule

  $$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n + 2n + 1 \geq n + 1$$

  par l'hypothèse de récurrence et en utilisant le fait que $2n \geq 0$. La propriété est donc héréditaire.
- Conclusion : pour tout entier naturel n, P_n est vraie. On a donc prouvé le résultat demandé.

Méthode de rédaction : Pour $n \geq ...$, posons la propriété P_n : "...". Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq ....$
- Initialisation : $P_{...}$ est vraie car... (initialiser au premier rang de la propriété à montrer)
- Hérédité : soit n quelconque et fixé tel que P_n est vraie. Montrons qu'alors P_{n+1} est vraie. (Preuve de l'hérédité). La propriété P_{n+1} est donc vraie, ce qui prouve que la propriété P_n est héréditaire.
- Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \geq ....$

Exercice. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 10$, on a l'inégalité $2^n \geq 100n$.

B Solution (rapide) de quelques exercices

Exercice 1. **1)** $a(n+1)$, **2)** 21, **3)** 16, **4)** nx_j.

Exercice 2. **1)** $1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2$, **2)** $x_p + x_{p+1} + ... + x_{n-1} + x_n$.

Exercice 3. On calcule $\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - 2x_k + 1) = n - 2n + n = 0$. Les termes de la somme précédente étant tous positifs ou nuls, ils sont nuls.

Exercice 4. **1)** $S_1 = 1$, $S_5 = 15$, $S_7 = 28$. **2)** La formule est vraie pour $n = 0$. Soit n fixé tel que $S_n = n(n+1)/2$. On a $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui valide l'hérédité et la récurrence. **3)** Voir article Wikipédia correspondant. **4)** On applique la formule (premier terme + dernier terme)/2 multiplié par (nombre de termes). Le premier terme est ici 0, le dernier n et le nombre de termes est $n+1$. **5)** $(p+n)(n-p+1)/2$ ou encore $n(n+1)/2 - p(p-1)/2$.

Exercice 5. **1)** La formule est bien entendu vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie pour un certain n, alors

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n^2 + 7n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

ce qui valide la récurrence est la question. Comme $k^2 \in \mathbb{N}$, il est clair que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6. On pouvait voir directement ce résultat en constatant que $n(n+1)(2n+1)$ est nécessairement pair (n ou $n+1$ est pair) et que l'un des trois entiers n, $n+1$ ou $2n+1$ est divisible par 3 (regarder selon le reste par la division euclidienne par 3). **2)** Le polynôme $P(x) = x^3/3 - x^2/2 + x/6$ convient. La somme des carrés vaut alors $\sum_{k=0}^{n} P(k+1) - P(k)$, ce qui par télescopage conduit à $P(n+1) - P(0)$.

Exercice 6. **1)** Si S_n désigne la somme des carrés et U_n la somme des entiers, on a $2T_n = S_n + U_n$. **2)** $12T_n = 6S_n + 6U_n = 3n(n+1) + n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(2n+4) = 2n(n+1)(n+2)$ donc $T_n = n(n+1)(n+2)/6 = \binom{n+2}{3}$.

Exercice 7. **1)** C'est le carré des nombres triangulaires. **2)** L'hérédité repose sur le calcul suivant $n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3 = (n+1)^2(n^2 + 4n + 4) = (n+1)^2(n+2)^2$. **3)** Voir Wikipédia. **4)** Le polynôme $P(x) = x^4/4 - x^3/2 + x^2/4$ vérifie $P(x+1) - P(x) = x^3$.

Exercice 8. **1) 2) 3)** Voir un cours de combinatoire. **4)** $2^n - 1$ et -1.

Exercice 10. Le polynôme $P(x) = x^5/5 - x^4/2 + x^3/3 - x/30$ vérifie $P(x+1) - P(x) = x^4$. On applique ensuite une somme télescopique.

Exercice 11. **1)** On utilise que $1/i(i+1) = 1/i - 1/(i+1)$ puis somme télescopique. Le résultat est $1 - 1/(n+1)$. **2)** On utilise que $1/(i(i-1)(i+1)) = \frac{1}{2}[\frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1}] - \frac{1}{i}$ puis somme télescopique.

Exercice 16. **1)** On pose $u_n = 9 \times 10^{-n}$. On a que $0,9999... = \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \times 10^{-n} = 1$, après avoir noté que la série ci-dessus est convergente (série géométrique).

Exercice 17. La suite des sommes partielles est majorée par 2. On peut par exemple utiliser que $\frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$.

Exercice 18. $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} 1/k \geq n \times 1/(2n) = 1/2$. Chaque terme de la somme est minoré par $1/(2n)$ et la somme comporte n sommes. Si par l'absurde (H_n) était convergente, alors $H_{2n} - H_n$ convergerait vers 0, ce qui est manifestement impossible par l'inégalité ci-dessus.