Simulations aléatoires

Chenlin GU[1]

[1]*DMA, Ecole Normale Supérieure, PSL Research University, Paris, France*

January 28, 2019

1 On peut faire des simulations (sans ordinateur)

Ex 1 (Pile ou face)**.** *Supposons que l'on dispose d'une pièce équilibrée. On écrit les événements* ($\{X = 1\} = \{Pile\}$, $\{X = 0\} = \{Face\}$)

$$\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 1] = \frac{1}{2},$$

et que l'on peut réaliser une suite d'expérience indépendantes identiquement distribuée $(X_i)_{i\geqslant 1}$*. En utilisant les variables* $(X_i)_{i\geqslant 1}$*:*

1. *Comment simuler un événement* E_1 *tel que* $\mathbb{P}[E_1] = \frac{1}{4}$ *?*
2. *Comment simuler un événement* E_2 *tel que* $\mathbb{P}[E_2] = \frac{1}{3}$ *?*
3. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, comment simuler un événement* E_3 *tel que* $\mathbb{P}[E_3] = \frac{1}{n}$ *?*
4. *Comment simuler une variable uniforme sur* $[0, 1]$ *? C'est-à-dire vérifiant pour tout* $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$
$$\mathbb{P}[U \in [a, b]] = b - a. \tag{1.1}$$

Ex 2. *Réciproquement, si l'on peut simuler une suite i.i.d de variable* $(U_i)_{i\geqslant 1}$ *et* U_i *suit la loi uniforme comme eq.* (1.1)*.*

1. *Comment simuler une variable aléatoire* X *qui suit la loi* $Ber(p)$ *i.e*
$$\mathbb{P}[X = 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 0] = p. \tag{1.2}$$
2. *Comment simuler une variable aléatoire* Y *qui suit la loi discrète* $(a_k)_{k\geqslant 0}$ *i.e*
$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}[Y = k] = a_k.$$

Ex 3 (Une pièce injuste)**.** (★) *Si l'on dispose d'une pièce non équilibrée (à priori)* X *tel que* X *suit une loi de Bernoulli de paramètre* p *mais qu'on connait pas la paramètre* p*. Comment simuler la loi des variables de loi* $Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ *en utilisant seulement cette pièce ?*

2 Simulation entraine estimateur

Ex 4 (Loi de grande nombre faible et estimateur)**.** *Le but de cette question est chercher un estimateur de p dans ex 3*

1. *Proposer un estimateur sans justification.*
2. *(Inégalité de Markov) Soit Y une variable aléatoire, démontrer que*
$$\forall a > 0, \mathbb{P}[|Y| > a] \leqslant \frac{1}{a}\mathbb{E}[|Y|]. \tag{2.1}$$
3. *Soit $Y_1, Y_2 \cdots Y_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et $\mathrm{Var}[Y_i] < \infty$, démontrer que*
$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[Y_i]. \tag{2.2}$$
4. *Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d qui suivent la loi Ber(p), et on définit un estimateur*
$$\hat{p}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i,$$
démontrer que
$$\forall \delta > 0, \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[|\hat{p}_N - p| > \delta\right] = 0. \tag{2.3}$$

Ex 5 (Chercher π)**.** *Utiliser la variable uniforme U pour simuler la constante de π.*

Ex 6. *Soit $(X_i)_{i\geqslant}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, on définit $F_X(a) = \mathbb{P}[X \leqslant a]$. Chercher un estimateur pour $F_X(a)$.*

3 IA(intelligence artificielle) est maths

Rappelle sur chaîne de Markov et le temps de mélange. Pour deux variables aléatoires discretes X, Y, on difinit la distance entre eux

$$d_{TV}(X, Y) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\mathbb{P}[X = k] - \mathbb{P}[Y = k]|\,.$$

Ex 7 (Voyage de RandomSkyWalker)**.** *(★) RandomSkyWalker voyage entre trois planètes $\{A, B, C\}$ au hasard. A chaque étape, il a probabilité $\frac{1}{2}$ de rester là où il est, et probabilité $\frac{1}{4}$ d'aller sur une autre planète. Démontrer qu'au sens de distance de variation totale que RandomSkyWalker va séjourner uniformément en $\{A, B, C\}$ dans longtemps.*

4 Simulation construit un espace de probabilité

Ex 8. *On étudie quelques propriétés élémentaires de percolation : On considère un modèle de percolation de Bernoulli de paramètre p dans $\mathbb{Z}^d (d \geqslant 2)$ et on définit*

$$\theta_n(p) = \mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow \partial(-n, n)^d]. \tag{4.1}$$

1. *Démontrer $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_{n+1}(p) \leqslant \theta_n(p),$. Il est donc naturel de définir*
$$\theta(p) = \mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow \infty] = \lim_{n\to\infty} \theta_{n+1}(p).$$

2. *Démontrer que* $\forall 0 \leqslant p < p' \leqslant 1$, *on a* $\theta(p) \leqslant \theta(p')$.

3. (★) *Démontrer que* $\theta(p)$ *est continue à droite comme fonction de la variable* p.

Ex 9 (Bonnus)**.** $\forall d \geqslant 2$, *le modèle fait apparaitre une transition de phase, c'est-à-dire il existe* $0 < p_c < 1$ *tel que*

$$\forall 0 < p < p_c, \theta(p) = 0. \qquad \forall p_c < p < 1, \theta(p) > 0.$$

Comment faire une simulation pour illustrer ce phénomène ?

References

[1] Levin, David A., and Yuval Peres. Markov chains and mixing times. Vol. 107. American Mathematical Soc., 2017.

[2] Duminil-Copin, Hugo. "Introduction to Bernoulli percolation." (2018).