Exercices de Topologie

Elyes Boughattas

13 Octobre 2018

> Nous voulons, tant ce feu nous brûle le cerveau, Plonger au fond du gouffre, Enfer ou Ciel, qu'importe? Au fond de l'Inconnu pour trouver du nouveau!
>
> *Charles Baudelaire*

1 Espaces métriques et distances

Exercice 1.1. *Quelques distances exotiques*
On définit la *distance SNCF* d sur $\mathbb{C}$ par

$$d(z,z') = \begin{cases} |z-z'| & \text{si } z \text{ et } z' \text{ sont sur une même droite passant par } 0 \\ |z|+|z'| & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{C}$.
2. Dessiner l'allure des boules ouvertes.

Montrer de même que la *distance peigne* δ sur $\mathbb{C}$ définie par

$$\delta(z,z') = \begin{cases} |z-z'| & \text{si } z \text{ et } z' \text{ sont sur une même droite verticale} \\ |\mathfrak{Re}(z)-\mathfrak{Re}(z')|+|\mathfrak{Im}(z)|+|\mathfrak{Im}(z')| & \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

est bien une distance.

Exercice 1.2. *Distance sur un produit.*

Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. Montrer que

$$d_{X\times Y} : ((x,y),(x',y')) \in (X\times Y)^2 \mapsto d_X(x,x') + d_Y(y,y')$$

définit une distance sur $X \times Y$.

Exercice 1.3. *Distances l^p*
Soit $p > 1$ et d_p définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On se propose de montrer que d_p définit bien une distance sur $\mathbb{R}^n$.

1. Vérifier que d_p satisfait les axiomes de séparation et de symétrie.
2. Pour montrer l'inégalité triangulaire, on procède par étapes. On pose q l'unique réel positif vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
   (a) Montrer que pour u, v positifs on a l'inégalité de Young
   $$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$
   (b) En déduire l'inégalité de Hölder : pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$
   $$\sum_{k=1}^{n} |u_k||v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   On pourra d'abord traiter le cas où $\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = 1$ puis s'y ramener.

(c) En déduire l'inégalité de Minkowski : pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k + v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(d) Conclure.

Exercice 1.4. *Espaces ultramétriques*
On appelle espace *ultramétrique* un espace métrique (X, d) sur lequel d vérifie l'inégalité *ultramétrique*

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)).$$

Montrer les curiosités suivantes :

1. Si $d(x, y) \neq d(y, z)$ alors on a égalité dans l'inégalité.
2. Tout triangle est isocèle, les côtés égaux étant de longueur supérieure au troisième.
3. Tout point d'une boule ouverte en est le centre.
4. Deux boules ouvertes sont disjointes ou l'une est incluse dans l'autre.

Soit p un nombre premier. On définit sur $\mathbb{Q}$ la *distance p-adique* d par

$$d(r, s) = p^{-v_p(r-s)}.$$

Montrer que $(\mathbb{Q}, d)$ est un espace ultramétrique.

2 Limites, Ouverts et Fermés

Exercice 2.1. *Limites et distances*
Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}_+$ et δ définie par

$$\delta(x, y) = \begin{cases} |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont non nuls} \\ |\frac{1}{x}| & \text{si } x \text{ non nul et } y = 0 \\ |\frac{1}{y}| & \text{si } y \text{ non nul et } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$

1. Montrer que δ est une distance.
2. Proposer une suite qui converge dans $(\mathbb{R}_+, d)$ mais pas dans $(\mathbb{R}_+, \delta)$.
3. Proposer une suite qui converge dans $(\mathbb{R}_+, \delta)$ mais pas dans $(\mathbb{R}_+, d)$.

Exercice 2.2. *Quelques opérations*
Soit (X, d) un espace métrique et $A \subseteq X$. Montrer

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
2. $\overline{A} = A$ si et seulement si A est fermé.
3. Quid de 1. et 2. avec des intérieurs?
4. A-t-on $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cup B)}$?
5. A-t-on $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cap B)}$?
6. Quid de 4. et 5. avec des intérieurs?

Exercice 2.3. *Itération des opérations*
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Quel est le nombre maximal de parties de $\mathbb{R}$ distinctes que l'on peut obtenir en prenant des intérieurs et des adhérences successives ?

3 Continuité

Exercice 3.1. *Quelques fonctions particulières*

1. Donner une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nulle part continue.

2. Donner une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui n'est continue qu'en 0.

3. Donner une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui n'est bornée sur aucun intervalle.

Exercice 3.2. *Équation fonctionnelle 1*

1. Montrer qu'une fonction continue injective est strictement monotone. On admettra le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) qui est énoncé et montré dans l'exercice 4.3.

2. En déduire l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $f \circ f = id_{\mathbb{R}_+}$.

Exercice 3.3. *Équation fonctionnelle 2*
Que dire de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) = f(3x)$?

Exercice 3.4. *Équation fonctionnelle 3*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$.

Exercice 3.5. *Une fonction non continue mais dont les points de continuité sont denses*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$

Déterminer les points de continuité de f.

Exercice 3.6. *Distance à une partie*
Si (X, d) est un espace métrique et A est une partie de X on note $d(., A)$ la fonction définie par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

1. Montrer que $d(., A)$ est lipschitzienne. En déduire qu'elle est continue.

2. Si A est fermé montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.

3. Si F et G dont deux fermés disjoints de X, trouver deux ouverts disjoints U et V contenant respectivement F et G.

Pour deux parties A et B de X on définit $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$. Si A et B sont fermées, la condition $d(A, B) = 0$ implique-t-elle que $A \cap B \neq \emptyset$?

4 Connexité

Exercice 4.1. *Définition équivalent de la connexité*
Montrer qu'un espace métrique X est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ est constante.

Exercice 4.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue d'espaces métriques. Si X est connexe montrer que $f(X)$ est une partie connexe de Y.

Exercice 4.3. Montrer que les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. En déduire le TVI : pour toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ l'image d'un intervalle est un intervalle.

Exercice 4.4. Existe-t-il un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$?

Références

Les exercices sont entre autres issus des sources suivantes :

1. *Analyse*, J.M. Arnaudiès et H. Fraysse

2. *Cours de mathématiques, tome 3*, Ramis, Deschamps et Odoux

3. Feuille d'exercices de Thomas Blomme : https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxjbHVicGFyaW1hdGhzfGd4OjYzYWQ2YjAzZGYzYmFlMGU

Pour revoir plus calmement les notions abordées durant la séance, puis pour les approfondir, on peut se référer à l'ouvrage suivant:

Topologie générale et analyse fonctionnelle, Laurent Schwartz