Baptiste Coquinot 2018

Parimaths

# Quel est le meilleur mode de scrutin ?

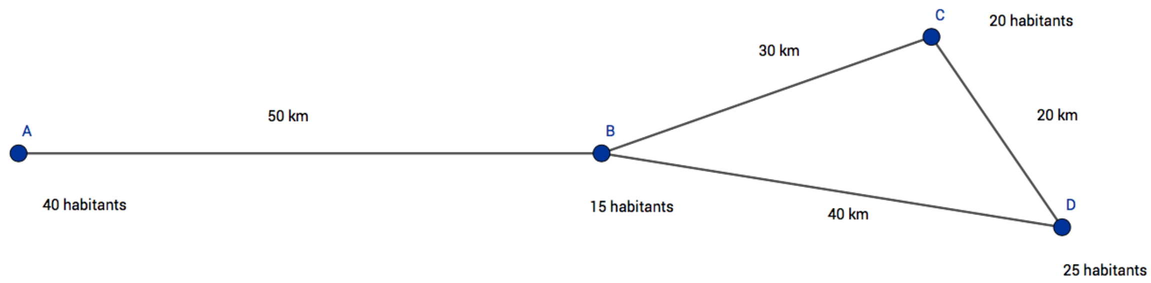
Autour du théorème d'Arrow.

# I. Problématique et modélisation.

## i) Introduction.

La problématique des scrutins de vote, est, de façon générale : on a un groupe d'individus ayant chacun une opinion, et on désire en faire sortir une décision de groupe. Ainsi, on se pose la question de la prise de décision, qui intervient dans bien des domaines. Par exemple : dans la justice, avec un jury, dans un groupe d'amis choisissant entre plusieurs restaurants, pour l'attribution de prix ou récompense, et bien sûr en politique. Mais aussi dans bien d'autres situations... Or, la méthode de vote est très importante, car mène à des comportements et des résultats très variés.

**Exemple :** On doit choisir dans laquelle de ces 4 villes on construira un hôpital. Comment faire ?




- □ Avec un vote à 1 tour, $A$ l'emporte.
- □ Avec un vote à 2 tours, $D$ l'emporte.
- □ Avec une évaluation des coûts de transports (population$\times$distance), $B$ l'emporte.
- □ Avec un scrutin alternatif à classement, $C$ l'emporte.
- □ Avec un scrutin de CONDORCET, $B$ l'emporte.
- □ Avec un scrutin de BORDA, $C$ l'emporte.

## ii) Modélisation.

On considère un groupe de $n$ individus noté $\{1, 2, \ldots, n\}$, et un ensemble de $m$ choix possibles noté $\Omega$. L'opinion d'une personne sera caractérisée par l'ordre de ses préférences parmi les choix possibles, soit une liste ordonnée des éléments de $\Omega$. Pour une élection politique par exemple, $\{1, 2, \ldots, n\}$ représente les votants et $\Omega$ les candidats. On notera $\Theta$ l'ensemble des classements ordonnés possibles des éléments de $\Omega$, et $\theta$ un élément de $\Theta$, *i.e.* un classement, *i.e.* un vote.

**Exercice :** Associer les éléments de l'exemple de l'hôpital au formalisme que l'on utilisera dans la suite.

**Définition (scrutin) :** On définit formellement un scrutin de vote comme une application $s : \Theta^n \longrightarrow \Theta$. En d'autres termes, comme une application qui à l'ensemble des $n$ listes de préférence des votants, associe une liste ordonnée des candidats, le résultat.

**Remarque :** Ces définitions sont larges et permettent donc de modéliser des cas très variés. Néanmoins, cela a des limites. On suppose ici par exemple que chacun des votants a un ordre de préférence complet, sans égalité. Alors qu'*a priori* certains pourraient ne pas avoir d'avis sur certains candidats. On suppose également que notre application est déterministe, *i.e.* on ne peut pas faire de tirage au sort. De plus, on demande ici une liste ordonnée comme résultat, alors que parfois on ne cherche qu'un seul vainqueur. Certes, on peut prendre comme vainqueur le premier de la liste résultat, mais rien ne nous assure que les résultats que l'on démontrera sur de tels scrutins fonctionnent toujours pour tout vote à unique vainqueur. Enfin, on supposera ici que tout est fini, on n'a pas une infinité de votants ou de candidats.

**Exemple :** i) Dans le scrutin à 1 tour, on ne considère que l'élément préféré de chaque votant, qui lui donne 1 point. On classe ensuite les candidats par nombre de points. C'est ce classement que renvoie l'application. Et pour élire une personne, le vainqueur est le candidat en tête que le classement résultat.

ii) Dans la dictature, on a un élément particulier de l'ensemble $\Gamma$, le dictateur. Notre application renverra à l'opinion de tous les membres de la population simplement le classement du dictateur.

iii) La plupart des scrutins courants sont soumis au vote stratégique. Par exemple, dans l'exemple de l'école ci-dessus, avec un scrutin à 2 tours, les habitants de la ville $A$, voyant qu'ils n'ont aucune chance au second tour, pourraient voter au premier tour pour $B$, lui permettant d'atteindre le second tour et de remporter l'élection. Une bonne chose ? Le problème en politique est que cela pousse au bipartisme et ne laisse alors que peu de moyen d'expression aux opinions minoritaires, qui ne sont que peu soutenues par leurs partisans lors des élections à cause du vote stratégique.

## iii) Scrutin de Condorcet.

On désire trouver le meilleur vote, et notamment éliminer la dictature, mais qu'est-ce qu'un bon vote ?

**Définition (vainqueur de Condorcet) :** Si un élément de $\Omega$ est préféré à chacun des autres éléments de $\Omega$ un à un par la majorité des $n$ individus, alors il est dit vainqueur de Condorcet.

**Exercice :** A-t-on unicité du vainqueur de Condorcet ?

Le mathématicien Nicolas de Condorcet (1743-1794) considéra que ce principe était le plus légitime pour donner un vainqueur à une élection. Si un scrutin de vote classe toujours en première position un vainqueur de Condorcet, on dira qu'il respecte le critère de Condorcet.

**Exemple :** Dans un scrutin à 2 tours comme en France, considérons l'élection suivante : on a 3 candidats, $A$, $B$ et $C$ et 100 votants ayant ces préférences :

- 35 votants préfèrent $A > B > C$.
- 30 votants préfèrent $B > A > C$.
- 35 votants préfèrent $C > B > A$.

Au premier tour, $A$ et $C$ arrivent en tête avec 35 voies, $B$, avec 30 voies est éliminé. Au second tour, $A$ remporte l'élection avec 65% des suffrages ! Victoire écrasante donc ! Pourtant, 65% des électeurs préfèrent $B$ à $A$ ...

En pratique, cela type de paradoxe se produit souvent, car en politique il y a une certaines polarité "droite-gauche". Pourquoi alors ne fait-on pas un scrutin de Condorcet ?

**Exercice :** A-t-on existence du vainqueur de Condorcet ?

**Paradoxe de Condorcet** : Il n'existe pas toujours de vainqueur de Condorcet.

**Exemple :** Considérons l'élection suivante : on a 3 candidats, $A$, $B$ et $C$ et 120 votants ayant ces préférences :

- 40 votants préfèrent $A > B > C$.
- 40 votants préfèrent $B > C > A$.
- 40 votants préfèrent $C > A > B$.

On a alors que $A$ est préféré à $B$, $B$ à $C$ et $C$ à $A$ ...

## iv) D'autres critères.

**Définitions :** Un scrutin vérifie le critère de :

i) **Unanimité** si : pour tous candidats $\alpha$ et $\beta$ (de $\Omega$ donc), si tous les votants (i.e. les éléments de $[\![1, n]\!]$) classent $\alpha$ devant $\beta$, alors $\alpha$ est classé devant $\beta$ dans le résultat du scrutin.

ii) **Indépendance aux alternatives non pertinentes** si : pour tous candidats $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ (de $\Omega$ donc), le classement relatif de $\alpha$ et $\beta$ (qui est devant l'autre) dans le résultat du scrutin est indépendant du classement de $\gamma$ par les votants (*i.e.* les éléments de $[\![1, n]\!]$). En d'autres termes, le classement relatif de $\alpha$ et $\beta$ dans le résultat du scrutin ne dépend que des classements relatifs de $\alpha$ et $\beta$ dans les préférences des votants.

**Exemple :** i) La dictature vérifie bien les deux critères. On aimerait donc en trouver d'autres.

ii) Le scrutin à 2 tours ne vérifie pas le critère d'indépendance aux alternatives non pertinentes. En voici un exemple "réaliste" (bien qu'il y en a des plus simples) : On considère que les votants sont répartis sur une ligne, typiquement la ligne idéologique gauche-droite, que l'on a représentée en la dilatant de sorte que la longueur soit proportionnelle au nombre de votants. Les croix représentent les candidats et chaque votant choisit le candidat le plus proche de lui. Les couleurs sont donc les électorats. On constate que lorsque l'on ajoute un candidat (ici en mauve), on change le vainqueur de l'élection : le noir au lieu du rouge.

**Exercice :** Montrer que les scrutins suivants ne vérifient pas l'indépendance aux alternatives non pertinentes :

- Scrutin à 1 tour.
- Scrutin alternatif à classement.
- Scrutin de BORDA.

# II. Le théorème d'impossibilité d'Arrow.

## i) Le théorème.

L'économiste américain KENNETH ARROW (1921-2017) démontrera en 1951 ce théorème d'impossibilité sur les scrutins :

**Théorème (Arrow)** Si $\Omega$ compte au moins 3 éléments (*i.e.* il y a au moins 3 candidats), le seul scrutin vérifiant les critères d'unanimité et d'indépendance aux alternatives non pertinentes est la dictature.

**Exercice :** Pourquoi il n'y a-t-il pas de problème si $\Omega$ ne compte que 2 éléments ?

**Démonstration :** On suppose que les critères d'unanimité et d'indépendance aux alternatives non pertinentes sont respectés. On va montrer que ce scrutin est alors la dictature.

On définit, si $\alpha$ et $\beta$ sont 2 candidats (des éléments de $\Omega$ donc) : un ensemble de votants $V$ (*i.e.* $V$ est un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$) est presque-décisif pour $(\alpha, \beta)$ si les conditions :

i) $\forall v \in V : \alpha > \beta$, *i.e.* tous les votants de V sont d'accord que $\alpha$ est meilleur que $\beta$.

ii)$\forall v \notin V : \alpha < \beta$, *i.e.* tous les votants qui n'appartiennent pas à V sont en désaccord avec ceux de $V$ sur l'ordre relatif de $\alpha$ et $\beta$.

Entraînent que dans le résultat du scrutin : $\alpha > \beta$. On dit que $V$ est décisif pour $(\alpha, \beta)$ si la condition i) seule suffit à assurer que dans le résultat du scrutin : $\alpha > \beta$. En d'autres termes, $V$ va décider de l'ordre relatif de $\alpha$ et $\beta$ contre l'avis de tous les autres votants, ou indépendamment de l'avis des autres votants. On voudrait des ensembles décisifs, mais des ensemble presque-décisifs sont plus simples à utiliser. C'est pourquoi on va passer par eux. On verra (étape 3) que l'on pourra passer de l'un à l'autre.

Notons qu'ici l'ordre de $\alpha$ et $\beta$ compte ! Dire que $V$ est décisif pour $(\alpha, \beta)$ n'entraîne *a priori* pas qu'il l'est pour $(\beta, \alpha)$, on n'a pas le droit d'inverser les conditions à souhait ! Néanmoins, on va voir que c'est bien le cas ici (étape 3). Ainsi, l'ensemble décisif décidera de l'ordre relatif des candidats $\alpha$ et $\beta$ indépendamment de l'avis des autres votants.

L'idée de la preuve est qu'en choisissant correctement un tel ensemble décisif, c'est un singleton, *i.e.* il ne possède qu'un seul élément, nommé pivot (étape 1). Et que de plus, ce votant est pivot pour tous les couples de candidats (étape 3). En d'autres termes, ce pivot décide du résultat complet indépendamment de l'avis des autres votants : c'est notre dictateur !

### ii) Première étape : le pivot.

On cherche des ensembles presque-décisifs, mais est-ce qu'il en existe ?

Si $\alpha$ et $\beta$ sont 2 candidats, alors il existe au moins 1 ensemble presque-décisif pour $(\alpha, \beta)$ : $[\![1, n]\!]$ tout entier. En effet, par le critère d'unanimité, si tous les votants classent $\alpha$ devant $\beta$, le résultat classera également $\alpha$ devant $\beta$. Or, c'est exactement notre définition !

**Exercice :** Quels sont les ensembles preque-décisifs d'un couple quelconque en dictature ?

Mais on cherche notre dictateur. Or, dans la dictature, quelque soit le couple de candidats, le dictateur seul est presque-décisif. On va donc chercher à réduire notre ensemble presque-décisif jusqu'à ce qu'il ne reste plus que le dictateur. Pour cela, on va choisir le plus petit et montrer qu'il ne contient qu'un seul élément. C'est raisonnable car on sait que c'est vrai si on admet le théorème !

Considérons alors tous les ensembles presque-décisifs associés à tous les couples de candidats possibles. On sait qu'il en existe, et potentiellement il y en a beaucoup ! Et puisque tout est fini, chacun de ces ensemble a un nombre fini d'éléments. Choisissons alors un ensemble presque-décisif $V$ ayant un nombre minimal d'éléments. Il peut y en avoir plusieurs, mais qu'importe on en choisit arbitrairement un. Cet ensemble est associé à un couple de candidats $(\alpha, \beta)$ pour lequel il est presque-décisif.

Montrons que $V$ est réduit à un singleton, *i.e.* il ne possède qu'un seul élément. Raisonnons par l'absurde est supposons que $V$ contient au moins 2 éléments. On peut alors couper $V$ en 2 ensembles non-vides disjoints $V_1$ et $V_2$. D'après l'hypothèse que l'on a fait : il existe au moins 3 candidats. On a alors un candidat $\gamma$ différent de $\alpha$ et $\beta$.

Considérons alors le vote suivant :

- $\forall v \in V_1 : \alpha > \beta > \gamma$.
- $\forall v \in V_2 : \gamma > \alpha > \beta$.
- $\forall v \notin V : \beta > \gamma > \alpha$.

Le classement des autres candidats est sans importance. C'est un vote possible, auquel notre scrutin doit donc répondre un résultat. Etudions-le.

Par définition de $V$ qui est presque-décisif pour $(\alpha, \beta)$, on a $\alpha > \beta$.

De plus, par minimalité de $V$, $V_2$ n'est pas presque-décisif pour $(\gamma, \beta)$. Sinon cela serait contradictoire puisque $V_2$ contient strictement moins d'éléments que $V$. Mais en outre, on a le critère d'indépendance, nous permettant de ne pas avoir à tenir compte du classement de $\alpha$. On obtient alors par contraposée $\beta > \gamma$, sinon cela serait exactement la définition de $V_2$ presque-décisif pour $(\gamma, \beta)$.

**Exercice :** Montrer que $\gamma > \alpha$.

**Preuve :** De même, par minimalité de $V$, $V_1$ n'est pas presque-décisif pour $(\alpha, \gamma)$. Sinon cela serait contradictoire puisque $V_1$ contient strictement moins d'éléments que $V$. Mais en outre, on a le critère d'indépendance, nous permettant de ne pas avoir à tenir compte du classement de $\beta$. On obtient alors par contraposée $\gamma > \alpha$, sinon cela serait exactement la définition de $V_2$ presque-décisif pour $(\alpha, \gamma)$.

Finalement, on a montré $\alpha > \beta > \gamma > \alpha$. Absurde !

On a donc montré que $V$ ne contient qu'un seul élément, notre pivot, que l'on notera $\pi$.

### iii) Deuxième étape : deux lemmes.

On va montrer que $\pi$ est presque-décisif pour $(\alpha, \beta)$ équivaut à $\pi$ est décisif pour $(\alpha, \beta)$ et $(\beta, \alpha)$. L'idée va être de faire tourner ces propriétes entres 3 candidats. Mais débutons par 2 lemmes.

**Exercice :** Si $a$ et $b$ sont 2 candidats, on a toujours une implication entre ($\pi$ est presque-décisif pour $(a, b)$) et ($\pi$ est décisif pour $(a, b)$), laquelle ? La démontrer.

**Lemme :** Si $a$, $b$ et $c$ sont 3 candidats distincts, alors ($\pi$ est presque-décisif pour $(a, b)$) implique ($\pi$ est décisif pour $(a, c)$).

**Preuve :** Supposons que $\pi$ est presque-décisif pour $(a, b)$. Considérons le vote suivant :

- ◻ Si $v = \pi : a > b > c$.
- ◻ $\forall v \neq \pi : b > a, b > c$.

Etudions le résultat. On a par hypothèse $a > b$, et par le critère d'unanimité, $b > c$. On a donc $a > c$. Mais par le critère d'indépendance, on peut ne pas considérer le classement de $b$. Notre résultat revient alors à (Si $v = \pi : a > c$) $\Longrightarrow$ ($a > c$ dans le résultat). C'est exactement dire ($\pi$ est décisif pour $(a, c)$).

**Exercice (Lemme) :** Si $a$, $b$ et $c$ sont 3 candidats distincts, alors ($\pi$ est presque-décisif pour $(a, b)$) implique ($\pi$ est décisif pour $(c, b)$).

**Preuve :** Supposons que $\pi$ est presque-décisif pour $(a, b)$. Considérons le vote suivant :

- ◻ Si $v = \pi : c > a > b$.
- ◻ $\forall v \neq \pi : b > a, c > a$.

Etudions le résultat. On a par hypothèse $a > b$, et par le critère d'unanimité, $c > a$. On a donc $c > b$. Mais par le critère d'indépendance, on peut ne pas considérer le classement de $a$. Notre résultat revient alors à (Si $v = \pi : c > b$) $\Longrightarrow$ ($c > b$ dans le résultat). C'est exactement dire ($\pi$ est décisif pour $(c, b)$).

### iv) Troisième étape : conclusion.

On a par hypothèse : il y a au moins 3 candidats. On a donc un troisième candidat $\gamma$.

On a par construction que $\pi$ est presque-décisif pour $(\alpha, \beta)$.

Par les lemmes, on a alors :

($\pi$ est presque-décisif pour $(\alpha, \beta)$) $\Longrightarrow$ ($\pi$ est décisif pour $(\alpha, \gamma)$) $\Longrightarrow$ ($\pi$ est presque-décisif pour $(\alpha, \gamma)$) $\Longrightarrow$ ($\pi$ est décisif pour $(\beta, \gamma)$) $\Longrightarrow$ ($\pi$ est presque-décisif pour $(\beta, \gamma)$) $\Longrightarrow$ ($\pi$ est décisif pour $(\beta, \alpha)$) $\Longrightarrow$ ($\pi$ est presque-décisif pour $(\beta, \alpha)$)

Puis on répétant, on en déduit : $\pi$ est décisif pour $(\alpha, \beta)$ et $(\beta, \alpha)$

Montrons désormais que $\pi$ est décisif pour $(a, b)$ et $(b, a)$ pour tout couple de candidats $(a, b)$

Remplaçons les 2 candidats de départ par $a, b$. On suppose $b$ distincts de $\alpha, \beta$. Sinon soit il n'y a rien à montrer, soit le cas est symétrique.

($\pi$ est presque-décisif pour $(\alpha, \beta)$) $\Longrightarrow$ ($\pi$ est décisif pour $(\alpha, b)$) $\Longrightarrow$ ($\pi$ est presque-décisif pour $(\alpha, b)$) $\Longrightarrow$ ($\pi$ est décisif pour $(a, b)$) $\Longrightarrow$ ($\pi$ est presque-décisif pour $(a, b)$)

Or on a vu que ceci entraînait que $\pi$ est décisif pour $(a, b)$ et $(b, a)$.

Conclusion, pour tout couple $a, b$ de candidats, on a que $\pi$ est décisif pour $(a, b)$ et $(b, a)$. C'est exactement dire que $\pi$ est un dictateur, puisque l'ordre des candidats deux à deux et donc dans leur ensemble ne dépend que du classement de $\pi$.

## III. Le théorème de Gibbard-Satterthwaite.

### i) Le théorème.

Dans les années 1970, Alain Gibbard et Mark Satterthwaite démontrent un autre théorème d'impossibilité sur les modes de scrutin, en se basant sur d'autres critères. De plus, ce théorème se base sur des scrutins à vainqueur unique. On va donc adapter notre définition de scrutin à cette modélisation.

**Définition (scrutin) :** On définit formellement un scrutin de vote comme une application $s : \Theta^n \longrightarrow \Omega$. En d'autres termes, comme une application qui à l'ensemble des $n$ listes de préférence des votants, associe un candidat, le vainqueur de l'élection.

**Exercice :** Comment associer naturellement à un tel scrutin un scrutin tel que vu dans les parties précédentes ?

**Définitions :** Un scrutin vérifie le critère de :

i) **Souveraineté** si : pour tous candidats $\alpha$ (de $\Omega$ donc), il existe un vote des éléments de $[\![1, n]\!]$ tel que $\alpha$ soit le vainqueur. En d'autres termes, tout le monde peut gagner l'élection.

ii) **Absence du dilemme du vote utile** si : les votants n'ont pas de dilemme du vote utile, c'est-à-dire si chaque élément de $[\![1, n]\!]$ a intérêt à voter ses vraies préférences pour obtenir le vainqueur lui convenant le mieux. Plus formellement, pour tout votant $i$, de préférence $\theta_i$, et tout vote possible $\overline{\theta_i} \in \Theta$, on a dans $\theta_i$ : $s(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1} \ldots, \theta_n) \geq s(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \overline{\theta_i}, \theta_{i+1} \ldots, \theta_n)$.

**Exercice :** Le critère d'unanimité entraîne le critère de souveraineté.

**Exercice :** Donner des exemples de scrutins où le dilemme du vote utile change le résultat de l'élection.

**Théorème (Gibbard-Satterthwaite) :** Si $\Omega$ compte au moins 3 éléments, le seul scrutin vérifiant les critères de souveraineté et d'absence du dilemme du vote utile est la dictature.

**Exercice :** Pourquoi il n'y a-t-il rien à faire s'il n'y a qu'un seul votant (*i.e.* $n = 1$).

**Démonstration :** Nous allons démontrer le théorème dans un cadre un peu plus faible, celui où le scrutin vérifie le critère d'unanimité. La démonstration repose sur le principe de récurrence. On va initialiser au cas $n = 2$ puis l'on procédera par récurrence sur le nombre de votants $n$.

On fixe $\Omega$ contenant au moins 3 éléments. La propriété de récurrence au rang $n$ est alors : "Si $s$ est un scrutin à $n$ votants vérifiant les critères d'unanimité et d'absence du dilemme du vote utile, alors $s$ est la dictature."

## ii) Première étape : initialisation de la récurrence.

On se place dans le cas $n = 2$ et on suppose que notre scrutin $s$ vérifie les critères d'unanimité et d'absence du dilemme du vote utile, et que $\Omega$ compte au moins 3 éléments. On va montrer que ce scrutin est la dictature.

**Exercice :** Soient $\theta_1$ et $\theta_2$ 2 votes tels que pour $\theta_1 : a > b > \ldots$ et pour $\theta_2 : b > \ldots$. On suppose de plus $s(\theta_1, \theta_2) \neq a$ Que vaut-il alors ? Le démontrer.

**Preuve :** Le résultat est alors $b$. En effet, si l'on imagine la situation où ces classements sont les préférences réelles des votants 1 et 2, le votant 2 aurait intérêt à changer son vote en inversant $a$ et $b$, faisant gagner $a$ par le critère d'unanimité. Mais alors, on contredit le critère d'absence du dilemme du vote utile, contradiction.

**Lemme :** Si $a$ et $b$ sont les candidats favoris des deux votants, alors le vainqueur par $s$ est soit $a$, soit $b$.

**Preuve :** Soit $a, b \in \Omega$ 2 candidats. Soit $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ 2 votes, tels que $\theta_1$ classe $a$ en premier et $\theta_2$ $b$. Si $a = b$, le résultat découle du critère d'unanimité. On suppose que ce n'est pas le cas. Raisonnons par l'absurde en supposant $s(\theta_1, \theta_2) = c \in \Omega$ avec $c \neq a$ et $c \neq b$. L'idée est de perturber les votes au niveau du deuxième choix afin d'obtenir de restreindre les vainqueurs possibles grâce au critère d'unanimité.

Soit $\overline{\theta_2} \in \Theta$ classant $b > a > \ldots$. Observons $s(\theta_1, \overline{\theta_2})$. Cela ne peut être $b$, sinon 2 aurait intérêt à changer son vote de préférence $\theta_2$ par $\overline{\theta_2}$, ce qui contredirait le critère d'absence du dilemme du vote utile. Le résultat est alors $a$. En effet, si l'on imagine la situation où la préférence réelle de 2 est $\overline{\theta_2}$, le votant 2 aurait intérêt à changer son vote en inversant $a$ et $b$, faisant gagner $a$ par le critère d'unanimité. Mais alors, on contredit le critère d'absence du dilemme du vote utile. On a donc montré $s(\theta_1, \overline{\theta_2}) = a$.

Soit maintenant $\overline{\theta_1} \in \Theta$ un vote alternatif de 1 classant $a > b > \ldots$. Observons $s(\overline{\theta_1}, \overline{\theta_2})) = a$. Le résultat ne peut être $b$, sinon dans le situation où la préférence réelle de 1 est $\overline{theta_1}$, il aurait intérêt à changer son vote pour $\theta_1$, contredisant le critère d'absence du dilemme du vote utile. Par le même raisonnement que précédemment, le résultat est alors $a$. On a donc montré $s(\overline{\theta_1}, \overline{\theta_2})) = a$.

Mais alors, le votant 1 dont le préférence est $\theta_1$ a intérêt à voter $\overline{\theta_1}$. Ce qui contredit le critère d'absence du dilemme du vote utile, absurde.

Soit $a, b \in \Omega$ 2 candidats. Soit $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ 2 votes, tels que $\theta_1$ classe $a$ en premier et $\theta_2$ $b$. On suppose toujours $a \neq b$ sinon il n'y a rien à dire. On suppose enfin, sans perdre de généralité, que $s(\theta_1, \theta_2) = a$, grâce au lemme. On veut montrer que c'est toujours 1 qui décide le vainqueur, quelque soient les votes.

Si l'on modifie le vote de 1 en $\overline{\theta_1}$ classant toujours $a$ en tête, on a $s(\overline{\theta_1}, \theta_2) = a$. En effet, sinon le votant 1 que l'on suppose préféré $\overline{\theta_1}$ aurait intérêt à changer son vote en $\theta_1$, contredisant le critère d'absence du dilemme du vote utile.

**Exercice :** Si maintenant on change le vote de 2 en $\overline{\theta_2}$ classant toujours $b$ en tête, que vaut $s(\overline{\theta_1}, \overline{\theta_2})$ ?

**Preuve :** Il vaut toujours $a$ ! En effet, par le lemme il vaut soit $a$, soit $b$. Et s'il valait $b$, le votant 2, que l'on suppose préférer $\theta_2$ aurait intérêt à changer son vote pour $\overline{\theta_2}$, contredisant le critère d'absence du dilemme du vote utile.

Ainsi, on a montré que pour tout vote $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ vérifiant que $a$ et $b$ sont leur premier choix respectif, $s(\theta_1, \theta_2) = a$. Reste à pouvoir changer le premier choix des votants. Soit alors $c \in \Omega$, différent de $a$ et $b$. Soit $\theta_1$ tel que $a > c > \ldots$, $\overline{\theta_1}$ vérifiant $c > a > \ldots$ et $\theta_2$ vérifiant $b > \ldots$. On sait $s(\theta_1, \theta_2) = a$. Etudions $s(\overline{(\theta_1)}, \theta_2)$. Il vaut $b$ ou $c$ par le lemme. Mais s'il vaut $b$, le votant 1, que l'on suppose préférer $\overline{(\theta_1)}$ aurait intérêt à voter $\theta_1$, contredisant le critère d'absence du dilemme du vote utile. D'où $s(\overline{(\theta_1)}, \theta_2) = c$.

Par le même raisonnement que précédemment, on a alors : $\forall c \in \Omega, c \neq b, \forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta$ de premier choix respectif $c$ et $b$, $s(\theta_1, \theta_2) = c$.

Modifions désormais le premier choix du votant 2. Soit $d \in \Omega$, $d \neq b$. On a $c \in \Omega$, différent de $b$ et $d$ car $\Omega$ compte au moins 3 éléments.

**Exercice :** Soit $\theta_1, \overline{\theta_2} \in \Theta$ de premier choix respectif $c$ et $d$. Que vaut $s(\theta_1, \overline{\theta_2})$ ? Le démontrer.

**Preuve :** On peut, par le même raisonnement que précédemment se contenter dele démontrer dans le cas $\overline{\theta_2}$ vérifie $d > b > \ldots$. En effet, ensuite, on peut modifier les choix différents du premier à souhait. Soit $\theta_2$ vérifiant $b > d > \ldots$. On sait que $s(\theta_1, \theta_2) = c$. De plus $s(\theta_1, \overline{\theta_2})$ vaut soit $c$, soit $d$. Mais s'il vaut $d$, le votant 2, que l'on suppose préférer $\theta_2$ aurait intérêt à voter $\overline{\theta_2}$, contredisant le critère d'absence du dilemme du vote utile.

On a donc montré que l'on pouvait changer le premier choix du votant 2. Mais pour le votant 1 on avait vu que l'on pouvait changer son premier choix en $c \neq b$. Pour le changer en $b$, on commence alors par changer celui du votant 2 en $d$ différent de $a$ et $b$ puis on change le choix du votant 1 en $b$. C'est exactement le même raisonnement. Notons que cela n'est possible que parce que $\Omega$ a au moins 3 éléments.

Finalement, on a montré que $s$ renvoyait toujours le premier choix de 1. C'est donc la dictature. D'où l'initialisation.

### iii) Deuxième étape : l'hérédité.

Soit $n \geq 3$. On suppose le théorème vrai au rang $n-1$. Une subtilité ici est que l'on utilisera le théorème au rang $n-1$ et au rang $n=2$ pour compléter l'hérédité. Donc l'initialisation est de 2 manières différentes. On comprend aussi pourquoi on a pa initialisé à $n=1$...

Soit donc $s : \Theta^n \longrightarrow \Omega$ vérifiant les hypothèses du théorème. On définit un nouveau scrutin, $t : \Theta^{n-1} \longrightarrow \Omega$ défini par : $\forall (\theta_1, \ldots \theta_{n-1}) \in \Theta^{n-1}, t(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = s(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}, \theta_{n-1})$. C'est sur $t$ que l'on pourra utiliser l'hypothèse de récurrence. Et on retrouve $s$ en faisant voter 2 fois le votant $n-1$.

**Exercice :** Montrer que $t$ est unanime. Que faut-il montrer d'autre pour pouvoir utiliser la propriété de récurrence ?

**Lemme :** $t$ est dictatorial.

**Preuve :** On a l'unanimité, reste à voir que $t$ vérifie le critère d'absence du dilemme du vote utile.

Si $i < n-1$, le votant $i$ n'a pas de dilemme du vote utile avec $t$. En effet, si $(\theta_i) \in \Theta^{n-1}$ et $\overline{\theta_i} \in \Theta$, on a par hypothèse que selon $\theta_j$, $s(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1} \ldots, \theta_{n-1}, \theta_{n-1}) \geq s(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \overline{\theta_i}, \theta_{i+1} \ldots, \theta_{n-1}, \theta_{n-1})$, *i.e.* $t(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1} \ldots, \theta_{n-1}) \geq t(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \overline{\theta_i}, \theta_{i+1} \ldots, \theta_{n-1})$.

Reste à étudier le votant $n-1$. Soit $(\theta_j) \in \Theta^{n-1}$ et $\overline{\theta_{n-1}} \in \Theta$. On notera $s(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \theta_{n-1}) = a$, $s(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \overline{\theta_{n-1}}) = b$ et $s(\theta_1, \ldots, \overline{\theta_{n-1}}, \overline{\theta_{n-1}}) = c$. Utilisons le fait que $f$ est sans vote utile. En observant le votant $n$, on obtient que pour $\theta_{n-1}$, $a \geq b$. En observant le votant $n-1$, on obtient que pour $\theta_{n-1}$, $b \geq c$. D'où $a \geq c$. Mais on peut aussi réécrire : $t(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = a$ et $t(\theta_1, \ldots, \overline{\theta_{n-1}}) = c$. On a donc démontré que $n-1$ n'avait pas de dilemme du vote utile avec $t$.

Ainsi, par l'hypothèse de récurrence, on obtient que $t$ est dictatoriale.

On a donc $\pi \in [\![1, n-1]\!]$ tel que le votant $\pi$ soit le dictateur de $t$. Il y a alors 2 cas à distinguer : soit $\pi < n-1$, soit $\pi = n-1$.

**1er cas :** Supposons $\pi < n-1$. Soit $(\theta_i) \in \Theta^n$. Notons $a$ le premier choix de $\pi$ et $s(\theta_1, \ldots, \theta_n) = b$.

Si le votant $n$ change son vote en $\theta_{n-1}$, le résultat deviendra $a$. Donc pour $\theta_n$, $b \geq a$. De même, si $n-1$ change son vote en $\theta_n$, le résultat deviendra $a$. En supposant le cas où la préférence de $n-1$ est $\theta_n$, puisqu'il n'a pas de vote utile, on a que pour $\theta_n$, $a \geq b$.

Ainsi, on a $a \geq b$ et $a \leq b$ selon $\theta_n$, *i.e.* $a = b$. Donc $s(\theta_1, \dots, \theta_n) = a$. Ainsi, $s$ est dictatoriale de dictateur $\pi$.

**2ème cas :** $\pi = n-1$. L'idée est alors que le dictateur de $s$ sera soit $n-1$, soit $n$, les deux votants joués par $\pi$. Reste à les distinguer. Pour cela, on va introduire un nouveau scrutin entre les 2 derniers votants et utiliser le cas $n = 2$ que l'on a déjà traité.

Soit $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \in \Theta^{n-2}$. On définit alors le scrutin $u : \Theta^2 \longrightarrow \Omega$ par : $\forall (\theta_{n-1}, \theta_n) \in \Omega^2, u(\theta_{n-1}, \theta_n) = s(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

**Exercice :** Montrer que $u$ est dictatorial.

**Preuve :** $u$ est sans vote utile car $s$ non plus. En effet, les votes des votants 1 et 2 de $u$ agissent de même que ceux des votants $n-1$ et $n$ de $s$.

Si $a$ est le premier choix de $\theta_{n-1}$ et $\theta_n$, le votant 1 de $u$ peut changer son vote en $\theta_n$. Alors $u(\theta_n, \theta_n) = t(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \theta_n) = a$ car $n-1$ est dictateur de $t$. Mais comme 1 n'a pas de dilemme du vote utile dans $u$, il n'a pas à changer son vote pour faire gagner son favori. Donc $u(\theta_{n-1}, \theta_n) = a$. D'où l'unanimité.

On applique alors le cas $n = 2$ : $u$ est dictatorial.

On a donc un dictateur de $u$, qui est 1 ou 2. Mais il faut voir qu'il ne varie pas avec $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ que l'on avait fixé auparavant. Soit $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \in \Theta^{n-2}$ et $(\overline{\theta_1}, \dots, \overline{\theta_{n-2}}) \in \Theta^{n-2}$. On définit alors deux scrutins $u$ et $\overline{(u)}$, chacun ayant un dictateur. Supposons qu'ils n'ont pas le même dictateur, par exemple 1 est le dictateur de $u$ et 2 de $\overline{u}$. Montrons que c'est absurde.

On change les votes des $n-2$ premiers votants de $s$ 1 à 1 de $\theta_i$ à $\overline{\theta_i}$. On regarde à chaque fois quel est le dictateur du "$u$" associé. Au départ c'est 1, à la fin c'est 2, on bascule donc à un moment donné. On peut donc définir $j \in [\![1, n-2]\!]$ tel que le dictateur de "$u$" pour $(\overline{\theta_1}, \dots, \overline{\theta_{j-1}}, \theta_j, \dots, \theta_{n-2})$ est 1 et que celui pour $(\overline{\theta_1}, \dots, \overline{\theta_j}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_{n-2})$ est 2. L'idée est que le votant $j$ a alors une importance primordiale sur le vote, ce qui est impossible car il ne peut être dictateur.

Soit $a, b \in \Omega$ tel que pour $\theta_j$, $a > b$. Choisissons $\theta_{n-1}$ et $\theta_n$ de sorte que leur premier choix respectif est $b$ et $a$. On a alors par construction : $\begin{cases} s(\overline{\theta_1}, \dots, \overline{\theta_{j-1}}, \theta_j, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}, \theta_n) = b \\ s(\overline{\theta_1}, \dots, \overline{\theta_j}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}, \theta_n) = a \end{cases}$

Mais alors $j$ a intérêt à changer son vote $\theta_j$ en $\overline{\theta_j}$, ce qui contredit le critère d'absence du dilemme du vote utile.

Ainsi, le dictateur de $u$ ne change pas avec $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$. On peut par exemple supposer que c'est toujours 2.

**Exercice :** Montrer que $n$ est dictateur de $s$. Terminer la démonstration.

# IV. Conclusion.

## i) Un peu d'espoir.

Ces résultats sont tout de même à relativiser. On a toujours des hypothèses derrière ces scrutins, certaines dans la modélisation choisie par exemple. On peut imaginer des scrutins n'étant pas basés sur un classement de préférence ou qui utilisent une dose d'aléatoire. Les votants n'ont pas toujours d'ordres de préférences complets, peut-être certains votants n'ont-ils pas d'avis sur certains candidats. De plus, les critères considérés sont critiquables, et on peut leur en préférer d'autres.

Un exemple de scrutin contournant le théorème d'ARROW est le "scrutin de CONDORCET randomisé".

L'idée est de partir du scrutin de CONDORCET. S'il y a un vainqueur de CONDORCET, on est content. Sauf que l'on a vu qu'il arrivait qu'il n'y en ai pas, on peut avoir des cycles. Comment les départager ? Ils sont, au sens de CONDORCET, *ex-aequo*, et différents scrutins donneraient des résultats complètement différents. En ce sens, le choix d'un scrutin pour les départager serait arbitraire, et nous ferait tomber dans le théorème d'impossibilité. C'est pourquoi avec ce scrutin on procède à un tirage au sort entre les *ex-aequo* (et non entre tous les candidats !).

Cela semble arbitraire, mais on peut voir cela autrement. On peut généraliser les résultats non pas comme étant des classements, mais des loteries où l'on attribuerait à chaque candidat des probabilités d'être élu. Le cas précédent étant donc le cas particulier des loteries où un candidat a une probabilité 1 d'être élu. On a alors un nombre infini de loteries possibles, que l'on peut classer pour chaque votant à partir du vote de ce dernier, si bien que l'on sort du cadre de l'étude de ce cours. Et il est démontré que l'ensemble des loteries contient toujours un vainqueur de Condorcet. C'est celle-là que l'on choisit. On a donc une manière naturelle d'obtenir ce scrutin.

De plus, ce scrutin vérifie de bons critères. Déjà, il vérifie le critère de Condorcet. Mais de plus il vérifie les critères d'unanimité et d'indépendance aux alternatives non pertinentes. Enfin, dans le cas où il existe un vainqueur de Condorcet, ce qui est le cas courant en pratique, il n'y a pas de dilemme du vote utile.

## ii) Bibliographie.

Pour en savoir plus, vous pouvez consulter les documents sur lesquels je me suis appuyé pour ce cours, et notamment regarder la chaîne de vulgarisation scientifique que j'ai mis en lien qui pourrait vous plaire :

◇ Cassels, John William Scott : "*Economics for mathematicians*" [livre]. Cambridge University Press, 1981.

◇ Arunava Sen : "*Another direct proof of the Gibbard-Satterthwaite Theorem*" [article]. Economics Letters 70, 2001.

◇ Lê Nguyên Hoang : "*Science4All*" [chaîne Youtube]. Disponible sur : `https://www.youtube.com/watch?v=fBYCoPAmpr4&list=PLtzmb84AoqRSmv5o-eFNb3i9z64IuOjdX`.

**Remarque finale :** Il est possible qu'il y ait des erreurs de frappe ou des points incomplets dans le document. Vous pouvez me contacter à l'adresse *baptiste.coquinot@ens.fr* pour toute remarque ou question.