Invariants

Luc Lehéricy

Club Parimaths, 13 janvier 2018

1. Peut-on recouvrir un échiquier 9×9 avec des dominos 1×2 ? Et un échiquier 8×8 auquel on a retiré deux coins opposés ?

2. Une feuille de papier est déchirée en trois parties. Ensuite, l'une de ces parties est déchirée de nouveau en trois parties, et ainsi de suite. Peut-on obtenir un total de cent parties ?

3. On considère le tableau de signe

$$\begin{array}{cccc} + & + & - & + \\ - & - & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{array}$$

   A chaque étape, on peut changer le signe de toutes les cases d'une ligne ou d'une colonne en leur opposé. Est-il possible d'atteindre un tableau constitué uniquement de $+$?

4. Est-il possible de répartir les entiers de 1 à 33 en 11 groupes de trois éléments chacun, de sorte que dans chaque groupe, l'un des éléments soit la somme des deux autres ?

5. On écrit les nombres 1, 2, ..., 2017 sur un tableau. A chaque étape, on choisit deux nombres a et b, on les efface et on écrit leur différence. Est-il possible que le dernier nombre restant soit 2 ?

6. Sur une île vivent 34 caméléons. Au début, 7 sont jaunes, 10 sont rouges et 17 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils prennent instantanément la troisième couleur. Au bout d'un certain temps, tous les caméléons sont de la même couleur. Quelle est cette couleur ? Est-ce la seule possible ?

7. On part du triplet $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. A chaque étape, on choisit deux éléments du triplet, disons x et y, on remplace x par $(x-y)/\sqrt{2}$, y par $(x+y)/\sqrt{2}$, et on laisse le troisième inchangé. Est-il possible d'atteindre le triplet $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ en un nombre fini d'étapes ?

8. On écrit les nombres 1, 2, 3, $\ldots$, 100 000 sur une feuille de papier, puis on remplace chaque nombre par la somme de ses chiffres jusqu'à ce que chaque nombre ne soit constitué que d'un seul chiffre. A-t-on plus de 1 ou de 2 ?

9. Alice et Bob s'affrontent au jeu suivant. Au début, n bâtons sont sur la table. Chaque joueur peut à son tour prendre 1, 2 ou 3 bâtons. La personne qui prend le dernier bâton a perdu. Alice joue en premier. Pour quels n dispose-t-elle d'une stratégie gagnante ?

10. 22 arbres sont mis en rond. Sur chaque arbre se pose un corbeau. Toutes les minutes, deux corbeaux se déplacent chacun sur un arbre voisin du leur. Est-il possible qu'ils soient tous rassemblés sur le même arbre au bout d'un certain temps ?

11. Alice et Bob s'affrontent au jeu suivant. Chacun leur tour, ils placent un jeton sur une table rectangulaire. Les jetons sont des disques, tous identiques. Pour que le coup soit valide, le centre du jeton doit être sur la table et le jeton ne doit pas recouvrir d'autre jeton (même partiellement). La dernière personne à placer un jeton gagne. Quel stratégie conseillez-vous à Alice ?

12. On dispose d'une pile de 1001 jetons. A chaque étape, on choisit un jeton qu'on élimine du jeu et on sépare une pile en deux piles arbitraires (le jeton ne vient pas nécessairement de la pile choisie). Peut-on se débrouiller pour n'avoir que des piles de 3 jetons ? 4 ? 5 ? (Si on a retiré tous les jetons d'une pile, cela donne une pile de zéro jetons, la pile ne disparaît pas)

13. On appelle tétromino une dalle de 4 carrés en forme de I, Z, T, L ou en forme de carré. Est-il possible de pavé un rectangle avec une pièce de chaque type ?

14. Les nombres 2, 3, 5, 7 et 11 sont écrits au tableau. Un mouvement consiste à remplacer deux nombres a et b de même parité par $(a+b)/2$ et $(b+a)/2$. Est-il possible de rendre tous les nombres égaux ?

15. Le plancher d'une pièce rectangulaire est pavé avec des dalles 2×2 et 1×4. Une dalle s'est brisée. Est-il possible de réarranger les dalles de façon à remplacer la dalle brisée avec une dalle de l'autre type ?

16. Considérons quatre entiers relatifs a, b, c et d qui ne sont pas tous distincts. A chaque itération on remplace (a, b, c, d) par $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Montrer qu'au moins l'un des nombres devient arbitrairement grand en valeur absolue.

17. Le jeu du taquin est constitué de carrés numérotés de 1 à 15 qui se déplacent dans un carré 4×4. On commence avec les carrés triés par ordre croissant de gauche à droite et de bas en haut avec le trou en bas à droite, à l'exception des carrés 14 et 15 qui sont inversés. Est-il possible de se ramener à la position où tous les carrés sont bien triés et où le trou est en bas à droite ?

18. On part du nombre 7^{1998}. A chaque étape on efface le premier chiffre du nombre et on l'ajoute au nombre restant. On s'arrête quand le nombre obtenu a dix chiffres. Montrer que cet entier a deux chiffres égaux.

19. Cinq 1 et quatre 0 sont placés autour d'un cercle dans n'importe quel ordre. A chaque étape, on écrit zéro entre deux nombres égaux et 1 entre deux nombres différents, puis on efface les nombres initiaux. Peut-on obtenir neuf 0 ?

20. On se donne une ligne de 1000 entiers. Sous chacun d'eux, on écrit son nombre d'occurrences dans la première ligne. On répète l'opération sur la deuxième ligne et ainsi de suite. Montrer qu'à partir d'un certain rang, les lignes sont identiques.

21. On se donne 35 entiers quelconques. A chaque étape, on en choisit 23 et on leur ajoute 1. Peut-on les rendre tous égaux ? Généraliser quand on a m entiers et qu'on ajoute 1 à n d'entre eux.

22. Supposons qu'il existe des éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $\{-1, 1\}$ tels que $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Montrer qu'alors n est divisible par 4.

23. Au parlement d'Hyxwikz, chaque député a au plus 3 ennemis. Montrer qu'il est possible de le découper en deux sous-parlements tel que chaque député ait au plus 1 ennemi dans son sous-parlement.

24. $2n$ ambassadeurs sont invités à un banquet. Chacun a au plus $n - 1$ ennemis. Montrer qu'on peut asseoir tous les ambassadeurs autour d'une table ronde telle que personne ne soit assis à côté d'un de ses ennemis.

25. Un cercle est découpé en 6 secteurs. On écrit dans l'ordre des aiguilles d'une montre les nombres 1,0,1,0,0,0 sur les secteurs. A chaque étape, on peut augmenter de 1 les nombres de deux secteurs voisins. Peut-on arriver dans l'état où tous les secteurs ont le même nombre ?

26. On construit les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ comme suit. On part de $0 < y_0 < x_0$ puis on pose $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que ces deux suites convergent et déterminer leurs limites.

27. On considère le processus suivant. A partir d'un mot constitué de 0 et de 1, on insère ou on supprime XXX n'importe où dans ce mot, où X est un mot constitué de 0 et de 1. Par exemple, on peut passer de 1110001 à 1111 en supprimant 000 ou à 1101010110001 en ajoutant 101010 après le premier 1. Est-il possible de passer de 01 à 10 en suivant ces opérations ?

28. Sur un damier infini, on place un jeton par case dans un carré de $n \times n$ cases, puis on joue comme suit. A chaque étape, on fait sauter un jeton par-dessus un autre pour l'amener sur un case vide, puis on élimine le jeton par-dessus lequel on a sauté. Pour quel n peut-on se ramener à une situation où il ne reste qu'un seul jeton ?

Éléments de solution

1. Regarder la parité de la différence entre le nombre de cases noires et de cases blanches.

2. Le nombre de feuilles de papier reste impair.

3. La différence entre le nombre de signes $-$ et de signes $+$ reste impaire.

4. La somme des nombres de 1 à 33 est impaire.

5. A chaque opération, on ne change pas la parité de la somme, qui est impaire au départ.

6. Les différences entre le nombre de caméléons de deux couleurs restent invariantes modulo 3. S'il ne reste qu'une couleur, il faut donc que la différence entre les deux autres soit divisible par 3. Cela n'est vérifié que pour la couleur verte.

7. Si on note (a, b, c) le triplet, la somme $a^2 + b^2 + c^2$ reste invariante, or elle est strictement plus grande à la fin qu'à l'arrivée.

8. Les nombres restent invariants modulo 9 car un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 9. Chaque reste apparaît le même nombre de fois, sauf 1 qui apparaît une fois de plus que les autres.

9. Regarder la parité du nombre de bâtons modulo 4.

10. Si on colorie alternativement les arbres en blanc et en noir, la parité du nombre de corbeaux sur les arbres blancs est un invariant.

11. Alice doit jouer exactement au milieu de la table puis conserver la symétrie du plateau à chaque coup.

12. Le nombre de jetons en jeu est égal au nombre de jetons initiaux moins le nombre de piles actuel plus 1. Ainsi, si on ne veut que des piles de n jetons, il faut que 1001 soit congru à -1 modulo $(n + 1)$. Cela élimine les piles de 3 et 4 jetons. On vérifie qu'il est possible de construire 167 piles de 5 jetons à partir de la pile initiale.

13. Le rectangle a nécessairement un nombre pair de cases, donc autant de cases blanches que noires. Chaque pièce à l'exception du T recouvre autant de cases blanches que noires, donc c'est impossible.

14. La somme reste invariante modulo 5.

15. On colorie les lignes paires en noir et blanc et les lignes impaires en rouge et bleu. On regarde les carrés bleues. Chaque dalle 2×2 en recouvre exactement une, et chaque dalle 1×4 en recouvre soit 0, soit 2. Changer de dalle changerait la parité du nombre de carrés bleues, ce qui est impossible.

16. A partir de la deuxième étape, la somme des nombres est nulle et la somme des carrés des nombres est au moins deux fois plus grande à chaque étape.

Définition (Signature d'une permutation)**.** *Une* permutation σ *de* $\{1,\ldots,n\}$ *est une application bijective de* $\{1,\ldots,n\}$ *dans lui-même.*

Une inversion *de* σ *est une paire* (i,j) *telle que* $i<j$ *et* $\sigma(i)>\sigma(j)$*. On dit que la permutation est* paire *si son nombre d'inversions est pair, sinon on dit qu'elle est* impaire.

La signature d'une permutation σ*, notée* $\varepsilon(\sigma)$*, vaut 1 si* σ *est paire et* -1 *si* σ *est impaire.*

Propriété. *Pour toutes permutations* σ_1 *et* σ_2*, on a* $\varepsilon(\sigma_1\circ\sigma_2)=\varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$*.*

Proof. Remarquons déjà que la signature vérifie

$$\varepsilon(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\operatorname{sgn}(\sigma(j)-\sigma(i)).$$

On a donc en notant $\mathcal{P}=\{\{i,j\},i\neq j,1\leq i\leq n,1\leq j\leq n\}$ l'ensemble des paires d'entiers entre 1 et n :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma_1\circ\sigma_2)\varepsilon(\sigma_2)&=\prod_{1\leq i<j\leq n}\operatorname{sgn}(\sigma_1(\sigma_2(j))-\sigma_1(\sigma_2(i)))\prod_{1\leq i<j\leq n}\operatorname{sgn}(\sigma_2(j)-\sigma_2(i))\\&=\prod_{\{i,j\}\in\mathcal{P}}\operatorname{sgn}(\sigma_1(\sigma_2(j))-\sigma_1(\sigma_2(i)))\operatorname{sgn}(\sigma_2(j)-\sigma_2(i))\\&=\prod_{\{k,l\}\in\mathcal{P}}\operatorname{sgn}(\sigma_1(l)-\sigma_1(k))\operatorname{sgn}(l-k)\\&=\prod_{1\leq k<l\leq n}\operatorname{sgn}(\sigma_1(l)-\sigma_1(k))\\&=\varepsilon(\sigma_1)\end{aligned}$$

et on conclut en utilisant que $\varepsilon(\sigma_2)\in\{-1,1\}$. □

17. Pour se ramener au carré en bas à droite, on doit effectuer un nombre pair de glissements. Comme un glissement a toujours pour signature -1, cela signifie que la signature de la permutation doit être paire. Or la signature de la permutation de départ est impaire.

18. Si tous les chiffres étaient distincts, le chiffre obtenu serait divisible par 9. Or le reste modulo 9 est un invariant de ces opérations, et le nombre de départ est premier avec 9. Il y a donc au moins 2 chiffres égaux.

19. Supposons que oui. Alors l'avant-dernière position est constituée uniquement de 1. Or à partir de la deuxième position, le nombre de 1 est toujours pair. C'est donc impossible.

20. A partir de la deuxième ligne, les nombres sont croissants en colonne, bornés par 1000 et entiers, donc convergent en un nombre fini d'étapes.

21. On peut si et seulement si m et n sont premiers entre eux. Si c'est le cas, on utilise le théorème de Bézout pour augmenter le plus petit de 1 de plus que les autres. Sinon, la somme de tous les nombres reste invariante modulo n, et la situation 1, 1, …, 1, 2 fournit un cas où le reste n'est pas le même modulo n à l'arrivée et au départ.

22. Changer le signe d'un des éléments fait varier la somme de -4, 0 ou 4. Si on change tous les signes en $+$, on obtient n, donc n est congru à 0 modulo 4, autrement dit n est divisible par 4.

23. On commence par construire deux parlements arbitrairement, puis on déplace successivement chaque député ayant deux ennemis ou plus dans son parlement. Le nombre de députés ayant deux ennemis ou plus dans son parlement est alors une suite strictement décroissante donc converge vers 0 en un nombre fini d'étapes.

24. Lorsque deux ambassadeurs ennemis A et B sont côte à côte, on repère une paire B', A' de voisins où A n'est pas ennemi de A' et B n'est pas ennemi de B', puis on retourne l'arc $[BB']$. Cela est toujours possible car il y a au moins n possibilités pour B' et que au plus $n-1$ des A' correspondants peuvent être ennemi de A. Cette inversion fait strictement diminuer le nombre de paires ennemies, donc le processus converge vers 0 au bout d'un nombre fini d'étapes.

25. La quantité $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ est invariante, où les nombres $a_1, \ldots, a_6$ sont ceux écrits dans les secteurs dans l'ordre des aiguilles d'une montre.

26. L'ordre $0 < y_n < x_n$ est toujours conservé par l'inégalité arithmético-géométrique. Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont respectivement croissantes et décroissantes, et leur différence tend vers 0 car $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)} \leq \frac{1}{2}(x_n - y_n)$. Elles sont donc adjacentes, donc convergent vers la même limite. Enfin, la quantité $x_n y_n$ est invariante, donc la limite x est égale à $\sqrt{x_0 y_0}$.

27. Si W est un mot, on note w_1, w_2, $\ldots$, w_L ses lettres, où L est la longueur de W. On vérifie que la quantité $\displaystyle\sum_{i=1}^{L} i \times w_i$ est invariante modulo 3.