Nombres complexes

Cyril Letrouit

25 novembre 2017

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Montrer que l'on a les égalités suivantes : $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|z|^2 = z\overline{z}$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Exercice 2. Simplifier les nombres complexes suivants : $z_1 = 3(2i-5) - i(3+4i)$, $z_2 = (3i - \sqrt{8})(\sqrt{5} - i) - 3(i\sqrt{2} + \sqrt{5})$, $z_3 = 1/(2-3i)$.

Exercice 3. Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants : $z_1 = (2+3i)^2$, $z_2 = (5-2i)^3$, $z_3 = i/(5+7i)$.

Exercice 4. Calculer le conjugué de $z = (7+2i)(2i-3)/(2i\sqrt{3}-4)$.

Exercice 5. Calculer le module de $(3+2i)/(-6+5i)$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\overline{z} - 1 = z\overline{z} - i$ et $z^2 - z + 2 = 0$.

Exercice(*) 7. Calculer les solutions complexes de l'équationd'inconnue z suivante : $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$.

Exercice(*) 8. Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ en utilisant les différentes écritures du nombre complexe

$$Z = \frac{i\sqrt{3}-1}{1+i}.$$

Exercice(*) 9. Montrer que tout polynôme à coefficients réels se factorise comme produit de polynômes de degré 1 et 2.

Exercice(**) 10. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Exercice(**) 11. Calculer $\sum_{i=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3i}$.

Exercice(*) 12. Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan complexe et a, b, c, d leurs affixes. Montrer que (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\frac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur. Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{d-c}{b-a}$ est réel.

Exercice(*) 13. Soient A, B, C, D, E, F six points distincts du plan complexe et a, b, c, d, e, f leurs affixes. Montrer que les triangles ABC et DEF sont semblables (avec même orientation) si et seulement si

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{d-f}{e-f}.$$

Exercice(*) 14. Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan complexe et a, b, c, d leurs affixes. Montrer que les points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}.$$

Exercice(**) 15. Soit ABC un triangle orienté dans le sens trigonométrique. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a + jb + j^2 = 0$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice(*) 16. On considère A, B, C trois points distincts du plan complexe d'affixes a, b, c. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice(**) 17. Soient A et B sur le cercle unité. Calculer une équation complexe simple de la droite (AB).

Exercice(**) 18. Soit Γ un cercle de rayon R et A, B, C, D, E, F dans cet ordre sur Γ tels que $AB = CD = EF = R$. Pour tous points X et Y du plan, M_{XY} désigne le milieu du segment $[XY]$. Montrer que le triangle $M_{BC}M_{DE}M_{FA}$ est équilatéral.