Sommes de carrés

Nicolas Fabiano

30 septembre 2017

1 Préliminaires : carrés mod p

Deux nombres ont le même carré si et seulement si ils sont égaux ou opposés.
a est un carré si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p$.

2 Somme de tous les carrés...

2.1 Entre 1 et n

$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Exemples de preuves : récurrence, arguments combinatoires, ou calcul.
Anecdote : $\sum_{k=1}^{24} k^2 = 70^2$

2.2 Modulo p

A partir de $p = 5$, la somme des carrés est nulle.

Cela s'explique simplement à partir de la formule précédente, car on a un facteur p au numérateur et aucun au dénominateur quelle que soit la manière de faire le calcul.

2.3 VRAIMENT tous

$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = -1/2$
$\sum_{k=1}^{\infty} k = -1/12$
$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = 0$
Cf fonction zêta de Riemann
Pour une justification de la deuxième somme, voir par exemple :
https ://www.youtube.com/watch ?v=xqTWRtNDO3U

3 Triplets pythagoriciens

On suppose $x^2 + y^2 = z^2$, avec x, y et z premiers entre eux et x impair.

On peut alors toujours écrire $x = p^2 - q^2$; $y = 2pq$; $z = p^2 + q^2$ avec p et q premiers entre eux et de parités différentes.

En effet :

y est impair de par des considérations modulo 4.

On pose $u = y/2$, $s = (z + x)/2$ et $t = (z - x)/2$, de sorte que $x = s - t$, $z = s + t$ et $st = u^2$.

s et t sont premiers entre eux car leur pgcd divise x et z.

On pose p/q la fraction irréductible u/t. On a alors irréductiblement $p^2/q^2 = u^2/t^2 = s/t$ donc par unicité $s = p^2$ et $t = q^2$, puis $u = pq$.

4 Détente : carré magique

Problème : Arranger les nombres 2^2, 46^2, 58^2, 74^2, 82^2, 94^2, 97^2, 113^2 et 127^2 dans un carré pour obtenir les 3 lignes, 3 colonnes et une diagonale à la même somme.

Solution :

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^4
74^2	82^2	97^4

On ne connait pas à ce jour de carré magique constitué de carrés tel que les 2 diagonales aient la bonne somme.

Ce problème est mis à prix : 500 euros et un bouteille de champagne !

5 Sommes de 2 carrés

Pour une preuve plus complète, voir par exemple :
http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ lgay/Agregation/2%20carre%CC%81s.pdf

5.1 Identité remarquable

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

5.2 Nombres premiers

On se place dans l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

-1 est un carré modulo p avec les préliminaires, donc on a $a < p$ tq $p|(a^2 + 1) = (a + i)(a - i)$.

Si par l'absurde p est premier dans $\mathbf{Z}[i]$, alors $p|(a + i)$ ou $p|(a - i)$ donc par conjugaison $p|(a + i)$ et $p|(a - i)$ donc $p^2|(a^2 + 1)$, alors que $a^2 + 1 < p$, absurde.

Donc on peut écrire $p = xy$ avec x et y non inversibles. On en déduit en notant N la norme que $N(x)N(y) = p^2$ donc $N(x) = p$. En écrivant $x = a + bi$, on a bien $p = a^2 + b^2$.

5.3 Cas général

Un entier est somme de deux carrés si et seulement si ses facteurs premiers congrus à 3 mod 4 sont de valuation paire.

6 Théorème des 4 carrés

6.1 Identité remarquable

$$\begin{aligned}(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2+t_2^2) = \quad & (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+t_1t_2)^2 \\ & +(x_1y_2-y_1x_2+t_1z_2-z_1t_2)^2 \\ & +(x_1z_2-z_1x_2+y_1t_2-t_1y_2)^2 \\ & +(x_1t_2-t_1x_2+z_1y_2-y_1z_2)^2\end{aligned}$$

6.2 Nombres premiers

Voir sur wikipédia

7 Théorème des 3 carrés (culture)

Un entier naturel est somme de trois carrés d'entiers si et seulement s'il n'est pas de la forme $4^j(8k-1)$.

La preuve n'a finalement pas l'air très élémentaire.