

# Théorie et Pratique des Jeux

Florent Noisette

September 19, 2017

## 1 Jeux finis à information parfaite

### Exercice 1. *Fort Boyard*

Cedric villani et le père Fourras jouent à une célèbre variante du jeu de Nim: devant eux se trouvent 2017 allumettes. Chacun son tour ils en prennent entre 1 et 5. Celui qui prend la dernière allumette a gagné. Cédric doit t-il choisir de commencer ou de laisser la main à son adversaire?

### Exercice 2. *La Revanche*

Le Fort exige une revanche: Terence Tao affronte la Boule. Devant eux se trouvent 2017 piles de 2017 allumettes. Chacun son tour ils en prennent entre 1 et 5 dans une des piles (non vide). Celui qui prend la dernière allumette a gagné. Terence doit t-il choisir de commencer ou de laisser la main à son adversaire?

### Exercice 3. *Pas de bras, pas de chocolat*

Cecile et Colin se dispute une tablette de chocolat rectangulaire composée de  $2017 \times 2017$  carreaux. Chacun son tour, ils choisissent un carré  $C$  et le mange, ainsi que tous les carrés en haut à droite de  $C$ . les carreaux situés dans le carré  $2 \times 2$  sont composés de chocolat blanc : quiconque mange un tel carré a perdu. Colin doit t'il choisir de commencer la partie?

## 2 Arbres enracinés

On dit qu'un jeu est combinatoire fini à information parfaite si: le hasard n'intervient pas; à chaque instant tous les joueurs ont accès à toutes les informations; chaque partie est finie.

**Théorème 2.1** (König). *Soit  $A$  un arbre enraciné dont tous les degrés sont finis. On suppose de plus que  $A$  ne contient pas de chemin infini. Alors  $A$  est fini.*

### Exercice 4

Que se passe t'il si les degrés ne sont plus supposés finis?

**Théorème 2.2** (Zermelo). *Soit  $G$  un jeu combinatoire fini à information parfaite à deux joueurs qui jouent à tour de rôle, l'un des deux possède une stratégie gagnante.*

## 3 Savoir choisir ses objectifs

### Exercice 5. *Les échecs de Donald Trump*

L'actuel président des états unis joue en ligne deux parties d'échec, une face à Kim Jun Il, où il joue les blancs et une face à Terminator, où il joue les noirs. Montrer qu'il dispose d'une méthode infaillible pour perdre au plus une partie.

### Exercice 6. *Le tarot à 5: une stratégie inepte*

Le tarot est un jeu qui se joue en 10 manches. Au cours de l'une d'elle un joueur appelle un allié. A la fin de la manche si elle est gagnée il gagne  $2n$ , le joueur appelé gagne  $n$  et les autres perdent  $n$  (où  $n$  dépend de la manche), sinon c'est l'opposé. Montrer qu'il peut être plus intéressant de perdre que de gagner au tarot.

## 4 Jeux à somme non nulle et équilibres de Nash

### **Exercice 7.** *Le dilemme du prisonnier*

Lors du gouter, Dieu surprend Adam et Eve en train de manger une pomme et va les gronder:

- si chacun protège l'autre, ils seront punis 1 jour
- si chacun dénonce l'autre, ils seront punis 10 jours
- si l'un dénonce l'autre, qui garde le silence, il n'est pas puni et l'autre est puni 11 jours

A la place d'Adam ou d'Eve (choisissez le personnage auquel vous vous identifiez le plus) que feriez vous?

### **Exercice 8.** *La clémence de dieu*

Dieu étant naturellement clément il réajuste les peines:

- si l'un dénonce l'autre, qui garde le silence, il est puni 1 jour et l'autre est puni 10 jours
- Changeriez vous de stratégie?

### **Exercice 9.** *Faucon/Colombe: il n'y a qu'un faux con*

Lors du gouter, deux semaines plus tard, Adam et Eve recommencent leurs betises, dieu furieux, leur propose le choix suivant:

- si chacun protège l'autre, ils seront punis 5 jours
- si chacun dénonce l'autre, ils seront punis 10 jours
- si l'un dénonce l'autre, qui garde le silence, il n'est pas puni et l'autre est puni 6 jours

A la place d'Adam ou d'Eve, que feriez vous?

### **Exercice 10.** *Un partage équitable?*

Jerome Kerviel propose à Karl Marx et Friedrich Engel le jeu suivant: marx doit diviser 1000 euros en deux et donner une des deux somme à Engel tandis qu'il recoit l'autre. Si Engel accepte ce choix, Kerviel leur fournit les 1000 euros, sinon ils ne recoivent rien (ni l'un, ni l'autre). Comment joueriez vous?