# Inégalités fonctionnelles

Thomas Lehéricy

April 14, 2018

Une partie de ces exercices provient de l'excellent cours de Pierre Bornzstein de l'OFM, qui regorge de conseils, d'exemples et d'exercices. Je vous en recommande chaudement la lecture si vous êtes intéressés par ce sujet. Les autres ont été glanés parmi les shortlists de l'IMO.

**Exercice 1 (Équation de Cauchy)** *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues (resp. monotones), telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

**Exercice 2** *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ continues (resp. monotones), telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

**Exercice 3** *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes, telles que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$.*

**Exercice 4** *Soit $a$ un réel, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}.$$

*a) Prouver que $f$ est périodique.*

*b) Pour $a = 1$, donner un exemple de telle fonction.*

**Exercice 5** *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$, $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = a$.*

**Exercice 6** *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{N}$,*

$$f(f(n) + f(m)) = n + m.$$

**Exercice 7** *Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(n) \geq g(n)$. Prouver que $f = g$.*

**Exercice 8** *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right).$$

**Exercice 9** *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que pour tout $x \geq 0$,*

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x.$$

**Exercice 10** *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les deux conditions:*

*a) pour tous réels $x, y$, $f(xf(y)) = yf(x)$,*

*b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.*

**Exercice 11 (*)** *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telles que $f(2) = 2$ et pour tous entiers $m, n$ premiers entre eux,*

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

**Exercice 12 (*)** *(IMO 2010 shortlist) Soit $Q_+^*$ l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$,*

$$f\left(f(x)^2 y\right) = x^3 f(xy).$$

**Exercice 13 (*)** *(IMO 2008 shortlist) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $p, q, r, s > 0$ avec $pq = rs$,*

$$\frac{f(p)^2 + f(q)^2}{f(r^2) + f(s^2)} = \frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2}.$$

**Exercice 14 (**)** *(IMO 2011 shortlist) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

*Prouver que $f(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$. (***) Donner un exemple de telle fonction.*

**Exercice 15 (**)** *(IMO 2016 shortlist) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) \neq 0$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$f(x+y)^2 = 2f(x)f(y) + \max\left[f(x^2) + f(y^2), f(x^2+y^2)\right].$$

**Exercice 16 (**)** *(IMO 2014 shortlist) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous entiers $m, n$,*

$$f(f(m) + n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014.$$

**Exercice 17 (**)** *(IMO 2015 shortlist) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$,*

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1.$$

**Exercice 18 (**)** *(IMO 2013 shortlist) Soit $Q_+^*$ l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$f(x)f(y) \geq f(xy) \quad \text{et} \quad f(x+y) \geq f(x) + f(y),$$

*et telles qu'il existe un rationnel $a > 1$ avec $f(a) = a$.*

**Exercice 19 (**)** *(IMO 2011 shortlist) Déterminer toutes les paires de fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y).$$