Séance du 10 mars 2018

- Guillaume Rabineau -

Structures algébriques - Théorie des groupes

Exercices et Problèmes

Sommaire

1. Lois de composition internes

2. Construction de Groupes

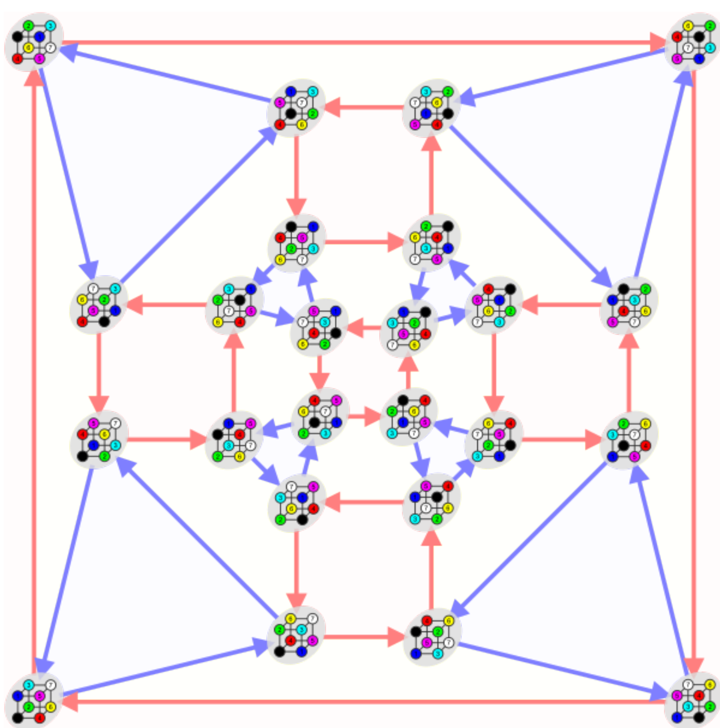
3. Sous-groupes

4. Parties engendrées, Ordres des éléments, Théorème de Lagrange

5. Morphismes de groupes

6. Le groupe symétrique

7. Exercices plus exigeants



I - Lois de composition internes

1. Soit E un ensemble fini à n éléments. Combien de lois de composition internes peut-on définir sur E ? Parmi ces lois, combien sont commutatives ?
2. Soit $(E, \star)$ un magma associatif tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2, tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $(xy)^n = yx$. Montrer que $\star$ est commutative.
3. Soit $(E, \star)$ un magma. On dit que $x \in E$ est idempotent si $x \star x = x$
   a) Montrer que si E est fini et $\star$ est associative, il existe $x \in E$ idempotent.
   b) Montrer que si tout élément de E est régulier et si $\star$ est distributive par rapport à elle-même, tout élément est idempotent.
   c) Montrer que si tout élément de E est régulier et si $\star$ est associative, E admet au plus un idempotent.
4. Soit $(E, \star)$ un monoïde commutatif. Soit $(x, y) \in E^2$. On suppose que xy est symétrisable. Montrer que x et y le sont aussi.

II - Construction de Groupes

5. **[Groupe Produit]** Soit $(G, \star)$, $(H, \otimes)$ deux groupes multiplicatifs, dont on note e_G et e_H les éléments neutres. On munit $G \times H$ de la loi de composition $\times$ définie par :

$$(g, h), \ \times (g', h') = (g \star g', h \otimes h')$$

   Montrer que $G \times H$ est un groupe. On précisera l'élément neutre.
6. Montrer que l'ensemble $G =]-1, 1[$ muni de la loi de composition interne définie par $x \otimes y = \frac{x+y}{1+xy}$ est un groupe.
7. (*) Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\star$ associative vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \exists x, y \in G, b = a \star x = y \star a$$

   Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.
8. Soit $(G, \star)$ un groupe abélien, α un élément de G. On définit la loi $\otimes$ par :

$$\forall x, y \in G, \ x \otimes y = x \star y \star \alpha$$

   Montrer que $(G, \otimes)$ est un groupe abélien.

III - Sous-groupes

9. Montrer que $\left\{x+y\sqrt{3} \mid (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \text{ et } x^2-3y^2=1\right\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$
10. Soit $(G, \times)$ un groupe et H une partie finie de G, non vide et stable par $\times$. Montrer que H est un sous-groupe de G.
11. Soit G un groupe fini et A, B deux parties de G telles que $|A|+|B|>|G|$. Notons $AB = \{ab,\ a\in A, b\in B\}$.
    a) Montrer que pour tout $g\in G,\ A\cap\{gb^-1, /; b\in B\}$ est non vide.
    b) Montrer que $G = AB$

    Remarque A partir de ce point, on omettra parfois de préciser la loi du groupe. On notera donc xy pour $x \star y$, par exemple.
12. [**Sous-groupes maximaux**] Un sous-groupe H de G est dit maximal s'il est distinct de G et n'est contenu dans aucun autre sous-groupe de G que G et H.
    a) $(\mathbb{Z}, +)$ admet-il des sous-groupes maximaux ?
    b) $(\mathbb{Q}, +)$ admet-il des sous-groupes maximaux ?
13. [**Caractérisation des sous-groupes dont l'union est un groupe**] Soit G un groupe et K, H deux sous-groupes de G. Montrer que $H\cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H\subset K$ ou $K\subset H$.

IV - Parties engendrées, Ordres des éléments, Théorème de Lagrange

Rappels d'arithmétique ; Si $(a,b)\in /N^*$, on notera $a\wedge b$ le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) et $a\vee b$ le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) de a et b. On dit que a et b sont *premiers entre eux* si $a\wedge b=1$.
On admet le théorème de Bézout :

$$a\wedge b = 1 \Longleftrightarrow \exists (x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid ax+by=1$$

14. Montrer que $(\mathbb{Z}^2, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ ne sont pas monogènes (i.e ne sont pas engendrés par un élément)
15. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.
16. Soit G un groupe abélien. On suppose qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall x\in G, x^n=1$ et vérifiant $n=ab$ avec a et b deux entiers premiers entre eux.
    (a) Montrer que $G_a = \{x^a,\ x\in G\}$ est un sous-groupe de G. On peut montrer de même que G_b (défini identiquement à G_a mais avec b) est un sous-groupe de G.
    b) Montrer que pour tout $x\in G$, il existe un unique couple $(u,v)\in G_a\times G_b$ tel que $uv=x$.

V - Morphismes de groupes

Remarque Pour la suite, on notera $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique, i.e le groupe des permutations des entiers $\{1, ..n\}$

17. Trouver les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$
18. $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^2, +)$ sont-ils isomorphes ?
19. Trouver dans cette liste les couples de groupes isomorphes : $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}^2, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}_+^*, \times), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}_+^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{C}^*, \times), (\mathbb{U}, \times)$
20. Soit $(G, .)$ un groupe fini et $\varphi : (G, .) \to (H, .)$ un morphisme de groupes.
    Montrer que $|G| = |\text{Ker } \varphi| \, |\text{Im } \varphi|$
21. Soit G un groupe abélien. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in G, x^n = 1$ et vérifiant $n = ab$ avec a et b deux entiers premiers entre eux.
    Montrer que, si $k \in \mathbb{N}$ est premier avec n, l'application $f : x \mapsto x^k$ est un automorphisme de G. Déterminer sa réciproque.
22. [**Un résultat d'arithmétique : Le Lemme chinois**] Notons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ le groupe-cyclique à n éléments. Montrer :
    $$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff m \wedge n = 1$$
23. [**Théorème de Cayley**] Soit G un groupe fini à n éléments. Montrer qu'il existe un morphisme injectif φ de G dans $\mathfrak{S}_n$.

VI - Le groupe symétrique

24. Un jeu de 32 cartes est battu de la façon suivante : on le coupe en deux jeux de 16 cartes et on alterne les cartes du 1$^{\text{er}}$ jeu et celles du 2$^{\text{nd}}$ de façon que la 1$^{\text{re}}$ carte du 1$^{\text{er}}$ jeu (soit le jeu du dessus) reste sur le dessus du paquet.
    Combien de fois doit-on itérer cette transformation pour revenir à la configuration initiale ?
25. Soit $\Omega_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \sigma(n+1-k) + \sigma(k) = n+1\}$. Montrer que Ω_n est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ et donner son cardinal.
26. Soit $n \geq 2$. Montrer que $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = n\}$ est un sous-groupe maximal de $\mathfrak{S}_n$.
27. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$ tous les morphismes du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$

VII - Exercices plus exigeants

28. Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

29. Soit $n \geq 2$. Quel est le nombre mimimal de transpositions engendrant $\mathfrak{S}_n$?

30. [**Groupes quasi-cycliques de Prüfer**] Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier premier et U_p le groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ engendré par l'ensemble des nombres $exp(\frac{2i\pi}{p^\alpha}$ où α décrit $\mathbb{N}$.
    a) Quels sont les sous-groupes de U_p ?
    b) Montrer que U_p est indécomposable, c'est-à-dire n'est pas isomorphe à un produit direct de deux groupes non triviaux.

31. [**Un cas particulier du lemme de Cauchy**] Soit $p \geq 3$ un nombre premier et G un groupe de cardinal $2p$. Montrer que G admet un élément d'ordre p.
    Remarque : On pourra prouver le lemme suivant :
    Lemme : Soit G un groupe fini tel que : $\forall x \in G, x^2 = e$. Alors G est abélien et son cardinal est une puissance de 2.

32. [**Groupes de type fini**] Un groupe G est dit de type fini s'il existe un sous-ensemble fini $A \subset G$ engendrant G. Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe de type fini n'est pas toujours de type fini.

33. [**Groupes absolument instables**] Soit G un groupe fini. Soit X une partie de G. Notons $XX = \{xy,\ (x, y) \in X \times X\}$. On dit que X est *absolument instable* si $XX \cap X = \emptyset$.
    a) Soit X absolument instable dans G. Montrer que $|X| < \frac{|G|}{2}$
    b) Soit H un sous-groupe de G. Etablir, pour $x \in G$, les équivalences entre les propositions :
        (i) xH est absolument instable
        (ii) Hx est absolument instable
        (iii) $x \notin H$
    c) Soit $X \subset G$, avec $|X| = \frac{|G|}{2}$. Montrer que X est absolument instable si et seulement si $G \setminus X$ est un sous-groupe de G.