Les filtres: une notion de taille

Florent Noisette

March 17, 2018

Le but de cette séance est de montrer l'existence d'*objets* vérifiant des propriétés données en montrant qu'en fait la plupart (dans un sens à préciser) des objets vérifient cette propriété.

1 Arguments de cardinalité

Définition 1.1. Une fonction $f : X \to Y$ est dite bijective quand elle est injective ($f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$) et surjective (pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tq $f(x) = y$)
Un ensemble est dit dénombrable quand il est en bijection avec $\mathbb{N}$

Théorème 1.1 (Cantor)**.** *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable*

Exercice 1. Montrer qu'il existe des nombres irrationels

Exercice 2. On dit qu'un nombre est transcendant quand il n'est pas racine d'un polynome à coéfficients entiers.
Montrer qu'il existe des nombres transcendants (en fait on peut même montrer qu'il existe des nombres qu'on ne peut pas décrire avec des mots)

Exercice 3. Montrer qu'il existe une fonction qui croit plus vite que toute fonction calculable (que l'on peut demander à un ordinateur de calculer).
Pourquoi n'est ce pas paradoxal?

Exercice 4. Montrer que $\mathbb{R}^2$ privé d'un ensemble dénombrable est connexe par arc (au sens où: pour tout couple de point il existe un chemin continu permettant d'aller de l'un à l'autre)

Exercice 5. ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale en chacune de ses variables, montrer que f est polynomiale.

2 Arguments de moyenne

Exercice 6. Soient $z_1, ..., z_n \in \mathbb{U}$
mq il existe $\epsilon_1, ..., \epsilon_n \in \{0,1\}^n$ tq: $|\sum_{k=0}^n \epsilon_k.z_k| \geq \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^n |z_k|$

3 The Baire necessities

Définition 3.1. Soit X un espace métrique.
Un ensemble $U \subset X$ est dit ouvert quand $\forall x \in U, \exists \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \subset U$. (leur complémentaires seront dit fermés)
Un ensemble $D \subset X$ est dit dense quand $\forall x \in U, \forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap D \neq \emptyset$. (leur complémentaires seront dit d'intérieur vide)

Théorème 3.1 (Baire)**.** *Une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$*

Exercice 7. Il existe des fonctions continues dérivables nulle part.

Exercice 8. ($\star$)
Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction C^0 et $n \in \mathbb{N}$, on pose: $c_n(f) = n.\int_0^1 f - \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})$
Montrer qu'il existe une fonction continue f tq la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.

Exercice 9. *Coromiras-Balager*. ($\star\star$)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tq: $f^{(n)}(x) = 0$.
Montrer que f est polynomiale.

4 Un peu de proba

Exercice 10. *Graphe de Rado*. On dit qu'un graphe G dont les sommets sont indexés par $\mathbb{N}$ est *aléatoire* quand: pour toute parties S_1 et S_2 de sommet de G, il existe un sommet s de G qui est relié à chacun des sommets de S_1 et à aucun des sommets de S_2.
Montrer qu'il existe des graphes aléatoires.
Bonus: Montrer qu'il y a en fait un seul graphe aléatoire à isomorphisme prêt.

5 Bienvenu aux CLUBs

Définition 5.1. Un *club* est un ensemble d'ordinaux fermé (CLosed) non majoré (UnBounded)

Exercice 11. Montrer que l'intersection de deux club en est un (en particulier elle est non vide)