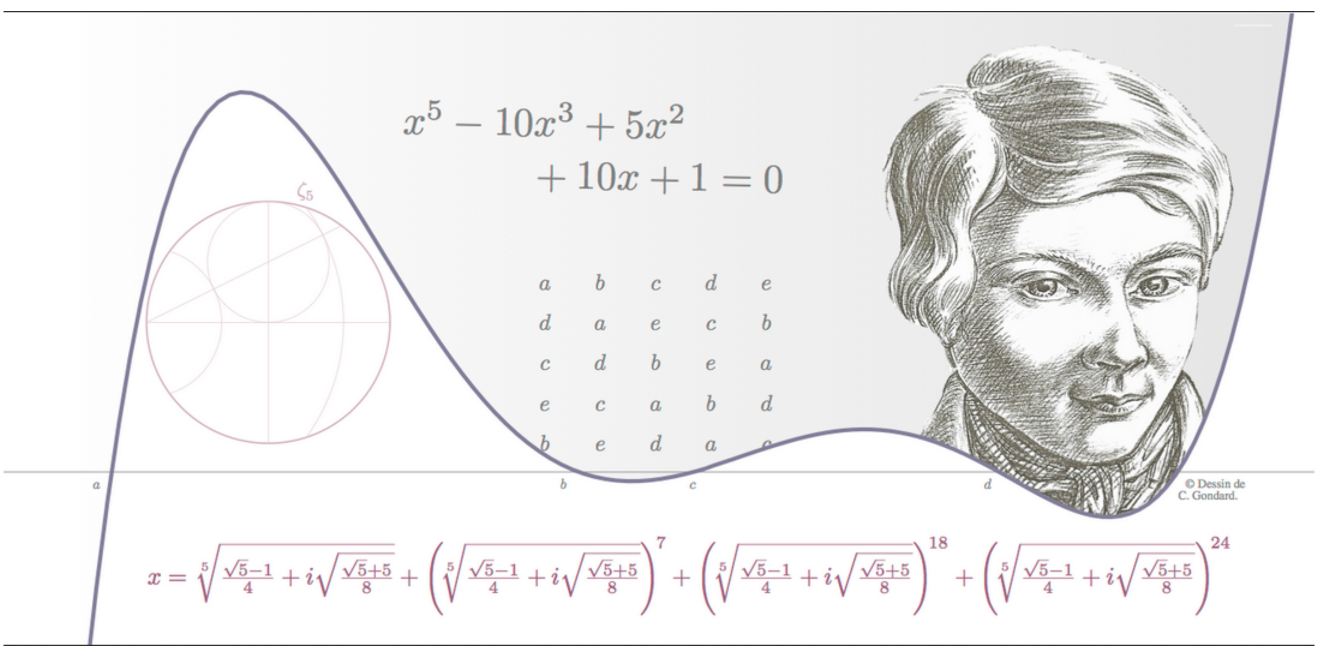
Séance du 20 janvier 2018

- Guillaume Rabineau -

POLYNÔMES

Exercices et Problèmes

Sommaire



I - Généralités

1. (**Fonctions polynômiales périodiques**) Soit $T > 0$. Quelles sont les fonctions polynômiales à coefficients réels telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x+T) = P(x)?$$

2. (**Polynômes pairs, impairs**). Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n$ un polynôme *pair* (entendons par là que la fonction polynômiale associée f est paire). Montrer que : $a_k = 0$ pour tout k impair. Que dire des a_k si le polynôme est impair ?

3. (**Polynômes de Hilbert**) Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $H_j(x) = x(x-1)...(x-j+1)$.

   a. Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer :
   $$H_{j+1}(x) - H_j(x-1)$$

   b. En déduire, pour j et n dans N^*, la somme :
   $$\sum_{k=1}^{n} H_j(k)$$

   c. Calculer les sommes : $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$

4. (*) (**Polynômes de Tchébychev**) Pour n dans $\mathbb{N}$, montrer qu'il existe une fonction polynômiale T_n telle que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, T_n(cos(t)) = cos(nt)$$

5. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :
$$\forall k \geq 1, \int_{k}^{k+1} P = k$$

II - Divisibilité des polynômes

1. Soit a et b deux réels strictement positifs. Quels sont les entiers naturels n tels que $X^2 - (a^2 + b^2)$ divise $X^{2n} - (a^n + b^n)^2$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les complexes $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$

3. Montrer que, pour tout $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^4$, $X^3 + X^2 + X + 1$ divise $X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$

III - Racines d'un polynômes

1. (**Majoration du module des racines d'un polynôme**) Soit $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Montrer que les racines complexes de P ont un module majoré par $max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$

2. (*) (**Une amélioration**) Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ de racines $z_1, ..., z_n$. On pose $r_0 = max\,|z_k|$. Montrer que :
$$r_0 < 1 + \max|a_k|$$

3. (**Règle de Lagrange - MacLaurin**) Soit P un polynôme à coefficients réels de la forme : $P = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n$ avec $a_i \geq 0$ pour $i = 1, ..., m-1$ et soit $A = max(-a_m, ..., a_n, 0)$. Alors toute racine réelle x de P vérifie $x < 1 + A^{\frac{1}{m}}$.

4. (**Racines de l'unité ; Un calcul astucieux**)

   a. Justifier la formule :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{j=1}^{n-1}(z - e^{\frac{2ij\pi}{n}})$$

   b. En appliquant la formule précédente en $z = 1$, , calculer :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$$

5. (**Calcul de racines ; racines de l'unité**). Déterminer les racines complexes du polynôme $P(X) = (X+1)^{2n} - (X-1)^{2n}$

6. (**Le retour de Tchébychev**)

   a. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'unicité du polynôme T_n vérifiant :
$$\forall t \in \mathbb{R}, T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$$

   b. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, T_n(z) + T_{n+2}(z) = 2zT_{n+1}(z)$$

   c. Pour n dans N^*, déterminer les réels t tels que $\cos(nt) = 0$

   d. Etablir la factorisation :
$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x - \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n}))$$

7. (**Rigidité des polynômes**) Soit P une fonction polynômiale de degré n avec $n \geq 2$ à coefficients réels. Montrer que le graphe de P ne peut contenir plus de n points alignés.

8. Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(k) = k^{1789}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

9. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P(k) = \frac{1}{k}$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Montrer que $degP \geq n-1$.

10. (**Formule d'interpolation de Lagrange**) Soient n dans $\mathbb{N}$, $x_0, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts. Pour j dans $\{0, ..., n\}$, on pose :
$$\forall x \in \mathbb{R}, L_j(x) = \prod_{0 \leq i \leq n, i \neq j}(\frac{x - x_i}{x - x_j})$$

a. Montrer que, pour j et k dans $\{0, ..., n\}$, $L_j(x_k)$ vaut 1 si $k = j$ et 0 sinon.

b. Soit P une fonction polynômiale à coefficients réels de degré au plus n. MOntrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k(x)$$

11. (**sur le même thème**) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P(k), ..., P(k+n)$ soient dans $\mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$
12. (**Théorème de d'Alembert-Gauss**) Quels sont les polynômes complexes P dont l'image est incluse dans $\mathbb{R}$?

IV - Polynômes irréductibles, dérivation des polynômes

Rappel : Un polyôme réel est dit scindé sur $\mathbb{R}$ s'il est produit de polynômes réels de degré 1 (i.e toutes ses racines sont dans $\mathbb{R}$), et scindé à racines simples si ses racines sont de plus de multiplicité 1.

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P
2. (**Règle de Newton**) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n. Soit L un réel tel que l'on ait $P^{(i)}(L) \geq 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Montrer que toute racine réelle de P est majorée par L.
3. (**Théorème de Rolle, Applications**) On admet le théorème de Rolle : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et qu'il existe $a < b$ avec $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. En déduire que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, alors P' l'est aussi.
4. Le polynôme $X^n - 2$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$?
5. (*) Soit $n \geq 2$ et $a_1, ..., a_n$ des éléments de $\mathbb{Z}$ deux à deux distincts. Montrer que $P = (X - a_1)...(X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$
6. Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, unitaire (ie de la forme $X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$), a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |Im(z)|^{degP}$$

où Im(z) partie imaginaire du complexe z

V - Pour les plus téméraires

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, P s'écrit $A^2 + B^2$ avec A et B dans $\mathbb{R}[X]$
2. (**Equation fonctionnelle**) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $P(X^2) = P(X)P(X+1)$
3. (**Equation fonctionnelle 2**) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X) = P(1-X)$
4. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$