Graphes : de la combinatoire à la topologie

Gabriel Pallier - Parimaths (groupe débutant)

30 avril 2017

Aujourd'hui, on s'intéressera à la théorie des graphes, aux graphes planaires, et (un peu) à leurs colorations. Cela nous permettra notamment de répondre de répondre en partie au problèmes suivants.

Problème 1. Combien de couleurs au minimum faut-il pour colorier les pays sur une carte du monde de sorte que deux pays qui ont une frontière commune sont colorés de manières différente ?

Plus précisément, on montrera ici que 6 couleurs suffisent [1]. Egalement, on traitera du problème suivant, déjà évoquée dans une séance précédente dans le plan.

Problème 2. Sur une surface S, soient a, b, c trois maisons distinctes que l'on veut relier à trois sources d'eau, de gaz et d'électricité u, v, w distinctes par des conduites qui ne peuvent pas se croiser. Est-ce possible ? Si oui, sur quelle surface S ?

Enfin, on donnera en dernière application une preuve de théorème de Sylvester-Gallai, d'apparence anodine, mais d'une difficulté non négligeable :

Problème 3 (Sylvester-Gallai)**.** Etant donné n points distincts dans le plan euclidien, non tous alignés, avec $n \geqslant 2$, il existe une droite qui passe par seulement deux d'entre eux.

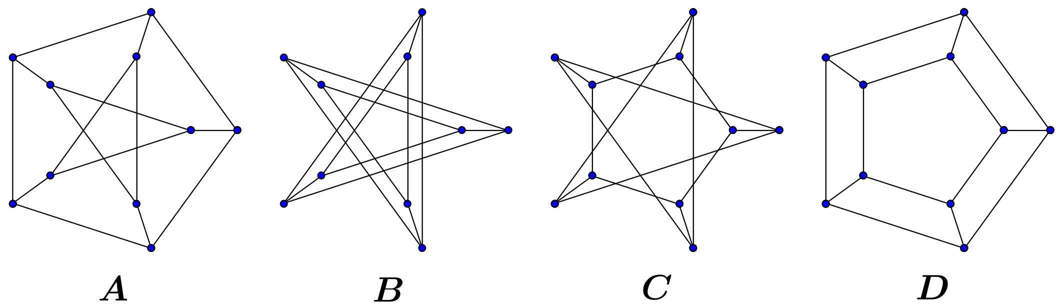
Notion de graphe

Voici quelques définitions informelles (on les précisera si besoin dans la suite).

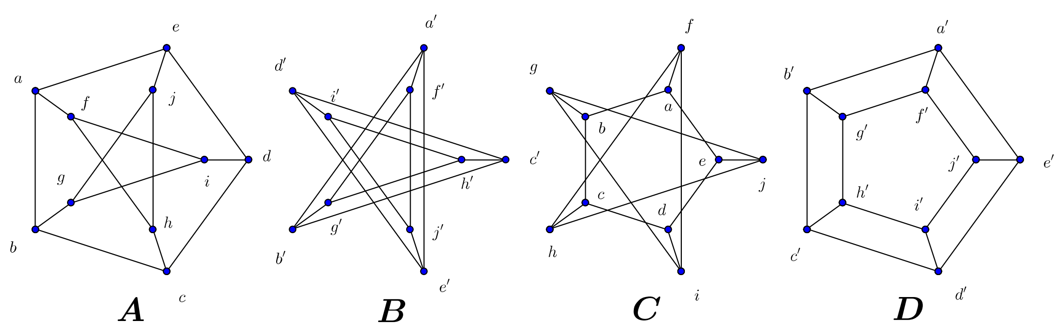
1. Pour nous un graphe, c'est :
   - Un ensemble (une liste, si l'on préfère) dont les éléments sont appelés *sommets*.
   - Un ensemble (ou une liste) d'*arêtes* auxquelles sont associés deux sommets, sans ordre, éventuellement non distincts.
2. On peut dessiner un graphe sur une feuille de papier, en associant à chaque sommet un point et à chaque arête une courbe reliant les sommets adéquats. C'est plus facile quand le graphe a un nombre fini de sommets et d'arêtes, ce qu'on supposera souvent. La forme des arêtes et la position des points n'a pas d'importance (l'exercice 1 devrait clarifier ceci).
3. Il est commode de donner un nom aux sommets, par exemple $a, b, c, \ldots$. Les graphes dans lesquels il y a au plus une arête entre deux sommets, et qui n'ont pas de boucles sont dits simples. Nos graphes seront le plus souvent simples.
4. Un graphe est planaire si on peut le dessiner sur un plan sans que les arêtes ne se croisent.

1. En réalité, on peut se contenter de quatre couleurs. La preuve a été obtenue en 1979 seulement, et a fait débat à l'époque, puisqu'il s'agit de l'une des premières preuves qui fait en partie appel à des calculs menés sur ordinateur (bien que les idées menant à sa résolution soient plus anciennes). Aujourd'hui encore elle est trop longue pour être vérifiée par un humain.

Exercice 1 Parmi les graphes suivants, lesquels sont les mêmes ? Montrer qu'au moins deux d'entre eux sont planaires.



<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Manifestement, le graphe D est planaire. En attribuant des noms aux sommets comme dessiné ci-dessous, on obtient que les graphes B et D sont les mêmes. En particulier B est planaire. De même, A et C sont les mêmes. Il reste à différentier (par exemple) A et D. Pour cela il est pratique de trouver un *invariant* qui les ditingue. On pourra remarquer par exemple que D a des chemins fermés de longueur 4 qui ne passent pas deux fois par la même arête (on les appelle cycles) tandis que les cycles de A sont de longueur au moins 5. Conclusion, $A = C$, $B = D$, et B et D (au moins sont planaires).



Remarque 1. Le graphe A (ou C) est appelé *graphe de Petersen*. On verra plus loin qu'il n'est pas planaire, contrairement au graphe B. Il ne faut donc pas se fier aux apparences !

Exercice 2 Par définition, le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes auquel ce sommet appartient. Montrer que dans un graphe fini, il existe un nombre pair de sommets dont les degrés sont impairs.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> C'est manifestement vrai pour un graphe sans arête. Maintenant, à chaque fois que l'on rajoute une arête, le nombre de sommets de degré impair est soit augmenté de 2 (si les deux extrémités avaient des degrés pairs), soit diminué de 2 (si les deux extrémités avaient des degrés impairs), soit inchangé (si l'une des extrémités avait un degré impair et l'autre un degré pair).

Exercice 3 La somme des degrés, c'est le double du nombre d'arêtes.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Faire la somme des degrés, c'est compter les arêtes « par les bouts » : elles sont comptées deux fois. Autrement dit : dans chaque poignée de mains, il y a deux mains !

Remarque 2. La fameuse formule attribuée à l'écolier Gauss

$$1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

peut être retrouvée à partir de l'exercice précédent, en comptant de deux manières différentes le nombre d'arêtes du graphe K_{101} qui a 101 sommets, et dans lequel toute paire de sommets est reliée par une arête.

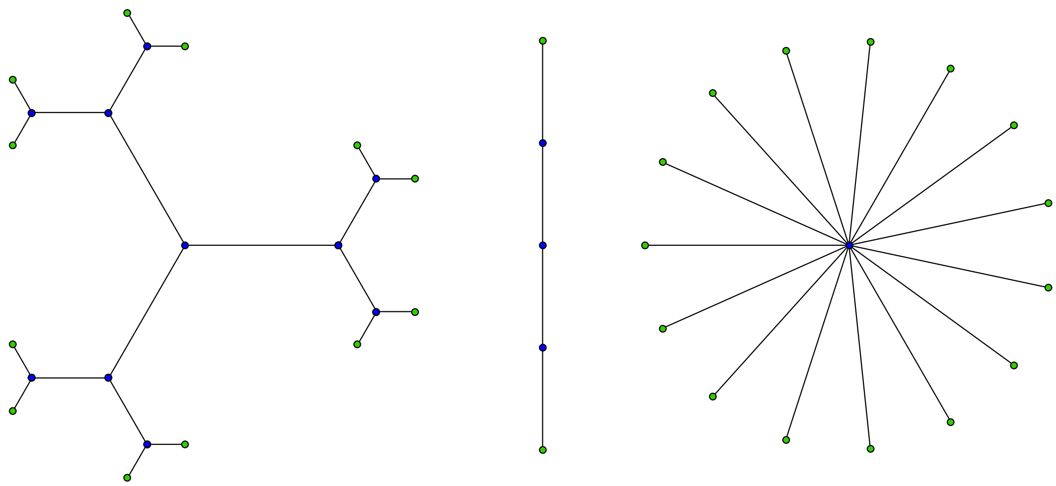


FIGURE 1 – Une forêt à 3 arbres et 29 feuilles.

Chemins et cycles, arbres et forêts

On a vu déjà entrevu ce qu'était un cycle dans l'exercice 1. Voici une définition précise :

Définition 3. Dans un graphe, une *marche* est une suite d'arêtes qui se « touchent », dans le sens où l'arête suivante partage toujours un sommet avec celle qu'on vient de parcourir. Un *chemin* est une marche qui n'emprunte pas deux fois la même arête. Un *cycle* est un chemin qui termine sur le même sommet que son départ [2]. Un graphe est *connexe* si entre deux sommets quelconques il existe un chemin. Les *composantes connexes* d'un graphe sont les plus grands morceaux connexes du graphe.

Exercice 4 Une *forêt* est un graphe fini simple qui n'a aucun cycle, et ses sommets de degré 1 sont appelés *feuilles*. Pourquoi cette terminologie ? Comment définir un *arbre* à votre avis ?

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Dessiner quelques petites forêts. On a envie de dire que les composantes connexes ressemblent à des arbres (sans tronc, peut-être !). On définit un arbre comme une forêt connexe, ou encore, un graphe connexe sans cycle.

Exercice 5 Remarquer qu'un arbre quand il perd une de ses feuilles reste un arbre. Pouvez-vous imaginer des arbres sans feuilles (non réduits à un sommet) ?

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Oui, mais ils sont infinis.

Théorème 4 (Propriétés caractéristiques des arbres)**.** *Dans un arbre T,*

1. *Entre deux sommets il y a un unique chemin.*
2. *Si on enlève une arête n'importe où, on casse la connexité.*
3. *Si on rajoute une arête n'importe où, on perd la propriété d'être une forêt.*

Si, de plus, T est fini, alors

4. *S'il y a S sommets et A arêtes, alors*

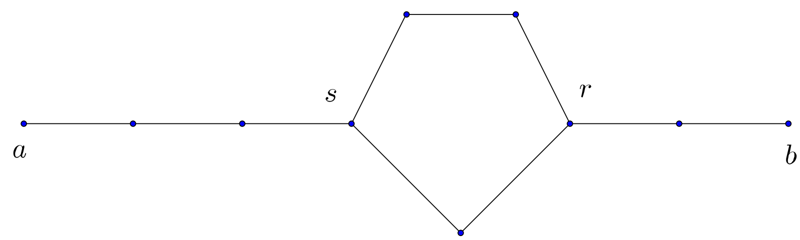
$$S - A = 1 \tag{1}$$

Mieux, on peut **définir** *la notion d'arbre par l'une de ces trois conditions (et par la quatrième parmi les graphes connexes finis).*

2. En général, quand on parle d'un cycle, on oublie le départ/arrivé. Si on veut s'en souvenir, on parle plutôt de *lacet*.

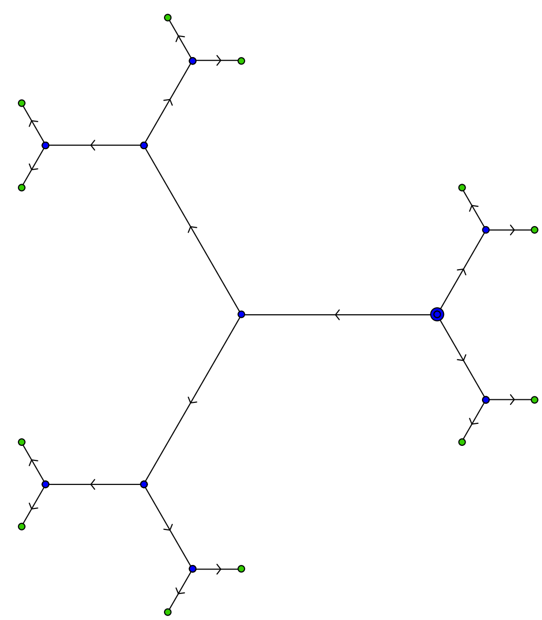
Exercice 6 Montrer la propriété 1 du théorème, puis en déduire (1). Indication : il peut être utile de planter votre arbre.

Solution de l'exercice 6 Pour montrer la propriété 1, on va raisonner **par l'absurde**. Si par l'absurde il y a deux chemins différents pour aller de a à b dans le graphe, alors ces deux chemins se séparent au sommet s (éventuellement un moment après avoir quitté a) et se rejoignent pour la dernière fois au sommet r (éventuellement un moment avant d'arriver en b). Mais alors, on peut créer un cycle passant par s et r ; c'est absurde, parce que nous sommes dans une forêt. Voici un dessin simplifié de la situation :



Maintenant, montrons la relation (1) entre les arêtes et les sommets. On donne pour cela trois méthodes :

1. On choisit un sommet privilégié r. Puisqu'il existe un unique chemin de r à tous les autres sommets du graphe, on figure ces chemins par des flèches ; il ne risque pas d'y avoir de conflit dans le sens des flèches, puisque le graphe est sans cycle.

   Finalement, on regroupe chaque arête avec le sommet vers lequel elle pointe.
2. Par **récurrence forte** : l'hypothèse de récurrence est

   $$\mathcal{P}(n): \text{ Les arbres à } n \text{ sommets ont } n-1 \text{ arêtes}$$

   Elle est valable pour $n = 1$: un arbre à 1 sommet n'a pas d'arête (sinon, ce serait une boucle, donc un cycle). Soit maintenant T un arbre à n sommets ; on choisit une arête, et on la retire. Cela coupe T en deux petits arbres T_1 et T_2, avec n_1 et n_2 sommets, $n_1, n_2 < n$. Par hypothèse de récurrence forte, les nombres d'arêtes de T_1 et T_2 sont respectivement $n_1 - 1$ et $n_2 - 1$, et le nombre d'arête de T est

   $$n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. Par *réccurence non-forte* : il s'agit d'observer qu'un arbre fini non réduit à un point possède une feuille. A partir de là, si l'on retire l'arête menant à cette feuille, on est ramené à l'hypothèse de récurrence au rang inférieur.

Remarque 5. On pourrait généraliser (1) : si p est le nombre de composantes connexes d'un gaphe fini F alors

$$A - S + p \geqslant 0 \tag{2}$$

avec égalité si et seulement si F est une forêt (p est alors le nombre d'arbres).

Soit G un graphe. Un sous-graphe est un graphe dont les sommets font partie des sommets de G et dont les arêtes font partie des arêtes de G. On dit qu'un sous-graphe H de G est *couvrant* si H est connexe et a les mêmes sommets que G.

Exercice 7 Montrer qu'un graphe fini possède un arbre couvrant dès qu'il est connexe.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Tant qu'il existe un cycle, on peut retirer l'une de ses arêtes sans perdre la connexité (puisque l'arête retirée faisait partie d'un cycle). A la fin le graphe obtenu est couvrant, connexe et sans cycle : c'est un arbre couvrant.

La relation d'Euler

Ici tous les graphes seront finis. On rappelle qu'un graphe est planaire s'il possède un dessin dans le plan où aucune de ses arêtes ne se croisent. Quelques remarques :

1. Pour le moment on ne sait pas encore s'il existe des graphes non planaires ; toutefois, remarquons que si un graphe est planaire, alors tous ses sous-graphes le sont aussi. Par conséquent pour montrer qu'un graphe est non planaire, il suffi(rai)t par exemple de trouver un sous-graphe non planaire.
2. Si on peut dessiner un graphe sans croisement sur le plan, alors a fortiori on peut le dessiner sans croisement sur la sphère. Une famille fondamentale de graphes planaires est donnée par les polyèdres convexes, via la projection stéréographique, dont j'ai parlé le 19 novembre 2016 à Parimaths (voir la fiche correspondante sur le site).

Il est assez tangible qu'un dessin plan d'un graphe planaire fini possède des *faces*. L'une d'entre elle est "infinie", c'est-à-dire qu'elle n'est pas limitée dans le plan (cette exception est résolue sur la sphère). Il n'est pas du tout clair que les faces ne dépendent pas du dessin. Nous éviterons la difficulté liée à la définition des faces, qui est sérieuse, ici. Nous verrons tout de même que le *nombre de faces*, notamment, est un invariant qui ne dépend pas du dessin.

Théorème 6. *[Formule d'Euler] Soit G un graphe planaire à S sommets, A arêtes. Alors, si F est le nombre de faces sur un dessin plan de G, on a la relation*

$$S - A + F = 2 \tag{3}$$

Le *degré* d'une face est le nombre d'arêtes qui la bordent. De même qu'une arête pointe vers deux sommets, elle borde deux faces, de sorte que la somme des degrés des faces est le double du nombre d'arêtes. Attention, si une arête a une même face de ses deux côtés, alors elle compte double dans le calcul du degré de cette face.

Définition 7. Soit G un graphe planaire ; son graphe dual, noté $G^\star$ est défini comme suit :

— Les sommets de $G^\star$ sont les faces de G.
— Dans $G^\star$ il y a une arête entre les faces μ et ν pour chaque arête bordante en commun.

Le graphe dual $G^\star$ est planaire, et $G^{\star\star}$ s'identifie à G.

Exercice 8 Soit G un graphe planaire. Quand peut-on être certain que le graphe dual $G^\star$ est simple ?

Solution de l'exercice 8 Pour que $G^\star$ n'ait respectivement pas de boucles ni d'arêtes double il faut que les sommets de G aient des degrés différents de 1 et 2 respectivement. Pour autant ceci ne suffit pas, il faut rajouter la condition que G reste connexe si on lui enlève au plus une arête.

A partir de maintenant, on raisonnera uniquement sous l'hypothèse d'un graphe simple dont le graphe dual est simple.

Preuve de la formule d'Euler La preuve est illustrée sur la figure 2. Soit G un graphe planaire. On se donne T un arbre couvrant de G (on sait qu'il existe d'après un exercice précédent) et $T^\star$ le sous-graphe de $G^\star$ formé sur l'ensemble des faces $V^\star$ en prenant toutes les arêtes qui ne correspondent pas à $T^\star$. On vérifie alors que :

1. $T^\star$ est sans cycle : s'il possédait un cycle, celui-ci séparerait deux sommets de V, l'un dans son intérieur, l'autre à l'exterieur. Mais ceci n'est pas possible puisque T est connexe.
2. $T^\star$ est connexe ; dans l'hypothèse du contraire, $T^{\star\star} = T$ devrait posséder un cycle.

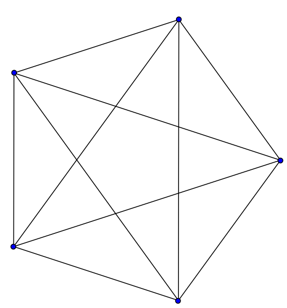
On en déduit que $T^\star$ est un arbre couvrant de $G^\star$. Le nombre total d'arêtes de G est

$$m = n_T + n_{T^\star} = s - 1 + f - 1 = s + f - 2$$

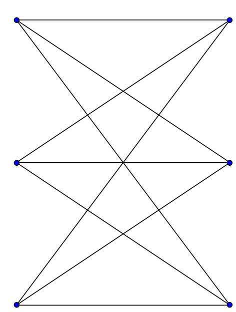
La formule d'Euler est démontrée.

Du problème des trois maisons au théorème de Kuratowski

On a dessiné ci-dessous les graphes K_5 et $K_{3,3}$. Le graphe K_5 est le graphe complet à 5 sommets ; il y a une arête pour chaque paire de sommets. Le graphe $K_{3,3}$ est le graphe du problème des trois maisons.



K_5



$K_{3,3}$

Exercice 9 On note $\overline{d}$ (resp $\overline{c}$) le degré moyen des sommets (resp. le nombre moyen de côtés des faces). Montrer les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{d} &= 2e/s \\ \overline{c} &= 2e/f \end{aligned}$$

Interpréter à l'aide de la dualité.

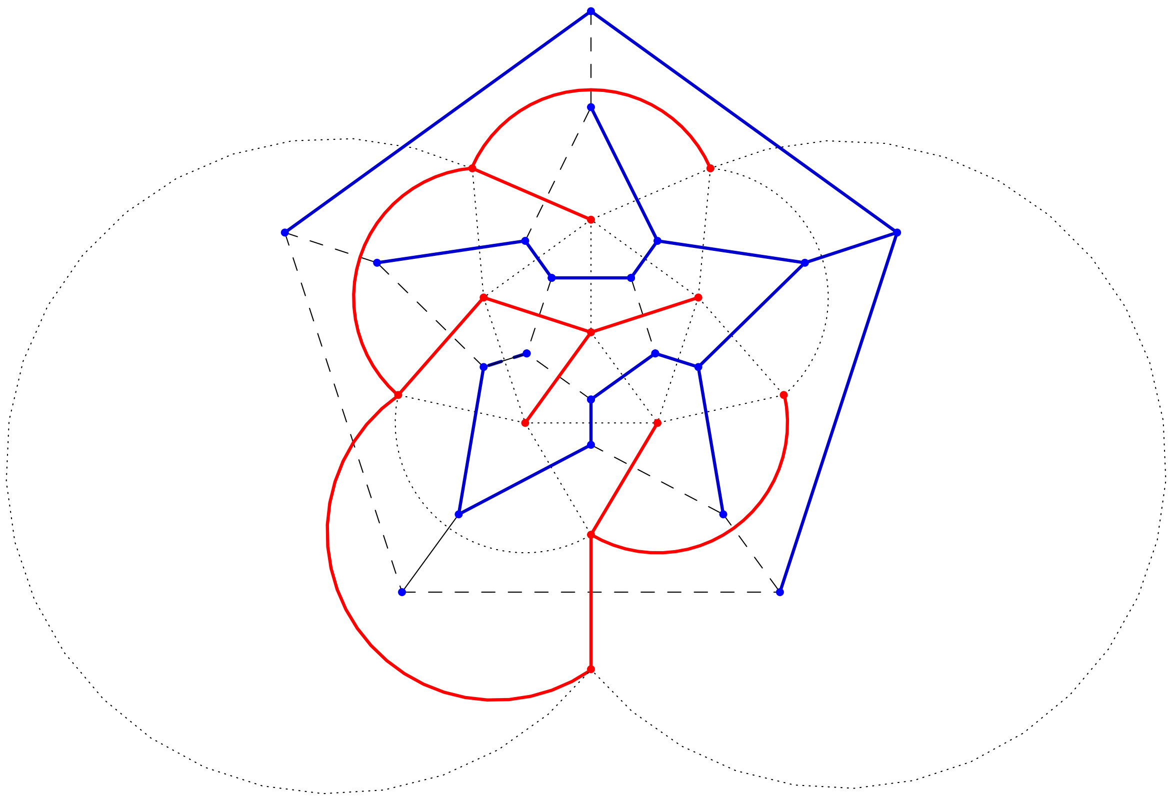


FIGURE 2 – Preuve de la formule d'Euler (en bleu, un arbre couvrant T du graphe du dodécaèdre ; en rouge un arbre couvrant $T^{\star}$de son dual)

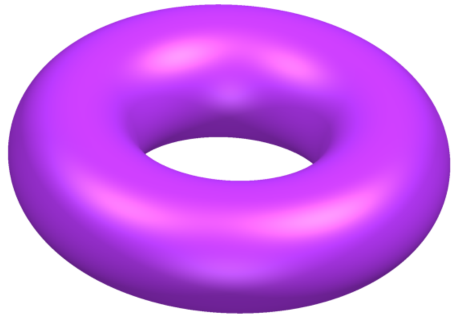


FIGURE 3 – Un tore

<u>Solution de l'exercice 9</u> Ces formules proviennent des arguments de double comptage évoquées plus haut

Exercice 10 En utilisant l'exercice précédent, montrer que si K_5 était planaire, il ne serait pas simple. Conclure.

<u>Solution de l'exercice 10</u> Supposons que K_5 est planaire. Alors, il possède des faces. Puisque K_5 possède 5 sommets et $\binom{5}{2} = 10$ arêtes, d'après la formule d'Euler il doit y avoir 7 faces. D'après l'exercice précédent, leur nombre moyen de côté est $\bar{c} = \frac{20}{7} \simeq 2.85$. En particulier, une face possède strictement moins de 3 côtés. Ceci est absurde puisque K_5 est un graphe simple, il ne peut donc pas posséder de 2-cycle. Conclusion, K_5 n'est pas planaire

Exercice 11 Montrer que si $K_{3,3}$ était planaire alors il posséderait un triangle. Conclure que le problème des trois maisons est insoluble dans le plan.

<u>Solution de l'exercice 11</u> Supposons que $K_{3,3}$ est planaire. Alors, il possède des faces. Puisque $K_{3,3}$ possède 6 sommets et 3×3 arêtes, d'après la formule d'Euler il doit y avoir 5 faces. D'après l'exercice précédent, leur nombre moyen de côté est $\bar{c} = \frac{18}{5} = 3.6$. En particulier, une face possède strictement moins de 4 côtés. Puisque $K_{3,3}$ est simple, il n'a pas d'arête double, donc pas de face à deux côtés. Il a donc un triangle. C'est absurde, parce que $K_{3,3}$ n'a pas de triangle (tous ses cycles sont de longueur paire, puisqu'on peut supposer qu'un cycle part et aboutit sur une maison).

En corollaire de la proposition, G n'est pas planaire dès qu'il contient un sous-graphe de la forme $K_{3,3}$ ou K_5.

Exercice 12 (le problème des n maisons et des m sources) On définit le graphe bipartite $K_{n,m}$ à $n+m$ sommets à partir de deux ensembles de sommets $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ tels que pour tout s_1 dans $\mathcal{S}_1$ et s_2 dans $\mathcal{S}_2$, il existe une arête entre s_1 et s_2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n et m pour que le graphe bipartite $K_{n,m}$ soit planaire.

<u>Solution de l'exercice 12</u> On peut supposer $n \leqslant m$. Si $n \geqslant 3$, alors $K_{n,m}$ possède $K_{3,3}$ comme sous-graphe ; il n'est pas planaire. sinon, on peut dessiner $K_{1,m}$ et $K_{2,m}$ sans intersection en plaçant les m sommets sur une droite.

G n'est toujours pas planaire si c'est une **expansion** de $K_{3,3}$ ou $K_{5,5}$, c'est-à-dire obtenu par ajout de sommets sur des arêtes et passage à un sur-graphe. Ainsi, par exemple, le graphe de Petersen dessiné plus haut (graphe A dans l'exercice 1) n'est pas planaire, puisque l'on peut vérifier qu'il s'agit d'une expansion de K_5 De manière assez surprenante, $K_{3,3}$ et K_5 suffisent pour décider si un graphe est planaire. Ceci constitue le théorème de Kuratowski (que nous ne démontrerons pas ici) :

Théorème 8. *Soit G un graphe connexe. Alors G est non planaire si et seulement si, G est une expansion de $K_{3,3}$ ou K_5.*

Exercice 13 Montrer que l'on peut dessiner $K_{3,3}$ sans intersection des arêtes sur un tore. Est-ce possible pour K_5 ?
<u>*Solution de l'exercice 13*</u> Conseil : faire le dessin dans un carré que l'on recolle les bords opposés pour obtenir le tore.

Sur le tore, toute la théorie est donc à refaire ! Mais Wagner a conjecturé en 1937 qu'il existait un analogue du théorème de Kuratowski sur toutes les surfaces "raisonnables" ; c'est-à-dire pour chaque surface un nombre fini de graphes interdits minimaux, dont les autres se déduisent par expansion. Robertson et Seymour ont démontré cette conjecture (sous une forme légèrement différente) en 2004. Leur preuve n'est pas constructive, c'est-à-dire que l'on ne peut pas en déduire les graphes interdits.

Caractéristique d'Euler Il est légitime de se demander s'il existe une généralisation de la formule d'Euler pour les graphes que l'on peut dessiner sans intersection sur un tore, et plus généralement sur une surface S. La réponse est oui, en voici un énoncé informel :

Proposition 9. Soit S une surface qui n'est pas infinie ; on dit que le dessin d'un graphe sans intersection sur S est une triangulation si toutes les faces qu'ils délimite sont "sans trou". Il existe un entier $\chi(S)$ tel que pour toute triangulation de S on a

$$n - m + f = \chi(S) \tag{4}$$

En particulier, si S est un tore à g trous alors $\chi(G) = 2 - 2g$.

Par "sans trou", nous entendons que le bord peut se déformer progressivement pour se contracter au centre. Les graphes planaires peuvent être affinées en des triangulations de la sphère S^2, qui est le tore à 0 trou de sorte que la relation d'Euler s'inscrit dans la proposition précédente. On peut vérifier que les dessins de $K_{3,3}$ et K_5 sur le tore forment une triangulation de sorte qu'ils ont respectivement 3 et 5 faces. Le problème des trois maisons a une solution sur les tores a trous multiples (laquelle ?) mais il n'est pas possible en général de parler de "faces" : ce ne sont pas des triangulations.
Exercice 14 Montrer que le problème des trois maisons est résoluble sur le ruban de Möbius.

Le lemme du petit degré

Il s'agit d'un lemme combinatoire bien utile pour les résultats qui suivent.

Lemme 10. Soit G un graphe planaire simple à n sommets. Alors G possède un sommet de degré au plus 5.

Démonstration. On note f_k le nombre de faces à k côtés. G est simple donc $f_2 = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} f &= f_3 + f_4 + \cdots \\ 2e &= 3f_3 + 4f_4 + \cdots \end{aligned}$$

D'où : $2e - 3f \geq 0$. Si par l'absurde chaque sommet a un degré $\geqslant 6$ alors

$$\begin{aligned} s &= s_6 + s_7 + \cdots \\ 2e &= 6s_6 + 7s_7 + \cdots \end{aligned}$$

D'où : $2e - 6s \geqslant 0$. On en déduit :

$$6(e - s - f) \geqslant 0$$

L'addition des deux inégalités précédente donne $e \geq s + f$ ce qui contredit la formule d'Euler. $\square$

Le théorème des six couleurs

Théorème 11. *Soit G un graphe planaire simple fini. Alors six couleurs suffisent pour colorier les sommets de G de telle sorte que deux sommets d'une arête commune sont toujours de deux couleurs différentes.*

Exercice 15 Démontrer le théorème des six couleurs à l'aide du lemme du petit degré.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> On procède par récurrence sur le nombre n de sommets. Si $n \leqslant 6$ la conclusion est manifestement valable. Sinon, prenons un sommet s de degré $\leqslant 5$ dont l'existence est fournie par le lemme. D'après l'hypothèse de récurrence, le graphe formé sur tous les sommets restants est colorable avec 6 couleurs de sorte que deux d'entre elles ne colorent jamais deux sommets voisins. Les voisins de v_0 ont au plus 5 couleurs différentes ; on peut donc choisir la couleur de s d'une manière compatible.

Remarque 12. On déduit la solution du problème anoncé dans l'introduction en appliquant le théorème au graphe dual du graphe dessiné par les frontières des pays. On généralise sans mal la version précédente à un nombre infini de pays, tant qu'il y a un nombre fini de pays dans n'importe quel carré du plan.

Le théorème de Sylvester-Gallai

Pour finir, nous donnons ci-dessous une démonstration du théorème de Sylvester-Gallai faisant appel à la formule d'Euler [3].

Théorème 13. *Etant donné un ensemble fini de $n \geqslant 2$ points du plan non alignés, il existe toujours une droite qui en contient exactement deux.*

Etape 1 Quitte à projeter le plan sur une sphère à partir du centre de la sphère, les points du plan sont ramenés à des bipoints (couples de points antipodaux sur la sphère) et les droites à des grands cercles.

On est alors ramenés à démontrer l'énoncé suivant : « Sur la sphère, étant donné un ensemble fini de n couples de points antipodaux qui ne sont pas tous sur un même grand cercle, il existe un grand cercle qui contient exactement 2 couples de ces points. »

Etape 2 (Passage au problème dual) Sur la sphère, on a une correspondance

$$\{\text{bipoints antipodaux}\} \longleftrightarrow \{\text{grands cercles}\}$$

qui à un bipoint fait correspondre l'ensemble des points équidistants ; et à un grand cercle, les pôles nord et sud si l'on identifie ce grand cercle à l'équateur. Trois bipoints sont alors sur un même grand cercle si, et seulement si, les trois grands cercles associés sont concourants (c'est-à-dire qu'ils ont un bipoint en commun).

Etape 3 Via l'étape précédente on est ramené à montrer que parmi n grands cercles non tous concourants il existe un bipoint ou exactement 2 se croisent. Les grands cercles dessinent un graphe sur la sphère ; il s'agit d'un graphe planaire, et d'après le lemme du petit degré, il possède un sommet de degré $\leqslant 4$. Or le degré d'une intersection de k grands cercles est exactement $2k$; donc il existe un sommet de degré 4 où exactement deux grands cercles s'intersectent.

3. Une autre démonstration de ce théorème fait appel à un argument extremal (stratégies de base) et par là, très curieusement, à la notion de distance.

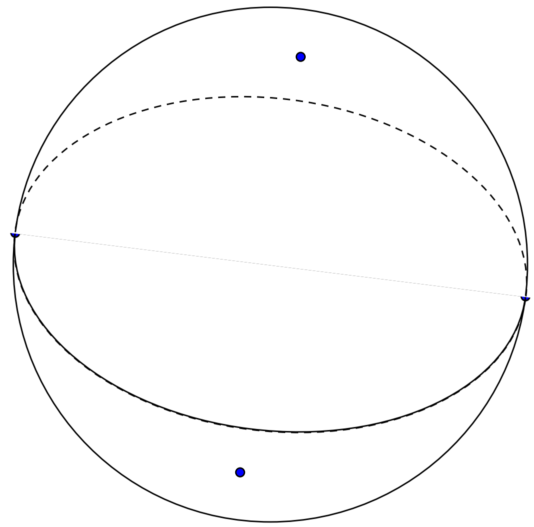


FIGURE 4 – Dualité bipoints / grands cercles sur la sphère

Quelques exercices supplémentaires...

Exercice 16 Combien y a-t-il de cycles de longueur ℓ dans le graphe K_n ? Dans le graphe $K_{n,m}$?

Solution de l'exercice 15 K_n et $K_{n,m}$ sont simples, donc déjà il n'y a pas de 1-cycle ni de 2-cycles, on supposera $\ell \geqslant 3$. Dans K_n, un cycle est la donnée de ses sommets, et d'un ordre de parcours de ces sommets, sachant que le choix du premier point et sens du parcours ne comptent pas. On en déduit que le nombre de ℓ-cycles est

$$N = \binom{n}{\ell} \cdot \ell! \cdot \frac{1}{\ell} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(\ell-1)!}{2}\binom{n}{\ell}$$

Dans $K_{n,m}$ il n'y a pas de ℓ-cycle si ℓ est impair (puisque par exemple, si l'on est parti de V_0, on sera dans V_1 après avoir suivi un nombre impair d'arêtes). En revanche, si ℓ est pair, écrivons $\ell = 2\ell'$; alors le choix d'un ℓ-cycle revient à celui de ℓ' éléments dans V_0, de ℓ' éléments dans V_1, puis d'un ordre de parcours de sorte que

$$N = \frac{1}{2}\binom{n}{\ell'}\binom{m}{\ell'}\frac{(\ell'!)^2}{\ell'^2} = \frac{(\ell-1)!^2}{2}\binom{n}{\ell'}\binom{m}{\ell'}$$

On a vu dans l'exercice précédent qu'un graphe bipartite ne contient pas de 3-cycle. En fait, le graphe bipartite $K_{n,n}$ est, parmi les graphes simples sans 3-cycles ayant autant de sommets, celui qui a le plus d'arêtes. Ce résultat constitue le théorème de Mantel [4]. Au sujet des graphes connexes simples qui n'ont pas de 4-cycle, signalons aussi le beau théorème de l'amitié (ou du politicien) qui est démontré dans le livre *Raisonnements Divins* de Aigner et Ziegler (dont la lecture est vivement recommandée en général). Le livre contient aussi une preuve du théorème des cinq couleurs (plus difficile que le théorème des six couleurs présenté ici).

4. Pour une preuve, on pourra consulter le polycopié de Pierre Bornzstein concernant les graphes. Une autre preuve à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est rapportée par Roger Mansuy dans Quadrature, numéro 87 (juillet 2015).