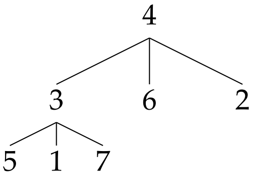
Partie II : Formule de Cayley

Le but de cette partie est de démontrer, en utilisant les méthodes qu'on a vues dans la partie précédente, le résultat suivant :

Théorème 1. ***Formule de Cayley.***
Il y a exactement $C_n = n^{n-2}$ arbres ayant pour l'ensemble des sommets $\mathcal{T}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

On appellera un tel arbre un *arbre couvrant* de l'ensemble $\mathcal{T}_n$.

Un exemple d'arbre couvrant pour $n = 7$:



On notera cet arbre T_{ex} dans la suite.

1 Quelques tests

a) Vérifier la formule de Cayley pour $n = 2, 3, 4$.
b*) Expliquer pourquoi $C_n \leq n^n$. On pourra penser à associer à un sommet i son ancêtre (une amélioration de cette idée donnera le fameux "codage de Prüfer", utilisée par Heinz Prüfer pour démontrer la formule de Cayley en 1918).
c*) Expliquer pourquoi n divise C_n. On pourra penser à permuter les indices.

2 Solution de Cayley

Ici, on propose d'étudier une sorte de fonction génératrice liée à ce problème. À un arbre couvrant T donné, on associe un polynôme

$$x_T = \prod_{i=1}^{n} x_i^{d_T(i)}$$

où $d_T(i)$ désigne le degré du point i dans l'arbre T.
L'observation remarquable de Cayley est la formule suivante :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_n} x_T = x_1 x_2 \ldots x_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{n-2}. \tag{1}$$

$\star$ Question préliminaire : vérifier cette formule pour $n = 2$.

a) Calculer x_T pour $T = T_{ex}$.
b) Existe-t-il un autre arbre dont le polynôme associé est égal à $x_{T_{ex}}$?

2.1 "Sanity checks"

Soit $C_n(\mathbf{x}) = C_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} x_T$.

$\star$ Question préliminaire: que vaut $C_3(\mathbf{x})$?

a) Vérifier l'homogénéité de l'équation (1), i.e. les degrés des polynômes sont tous $2n-2$. On pourra d'abord remarquer que

$$x_T = \prod_{(i,j)\in E(T)} x_i x_j$$

où l'on parcourt toutes les arêtes (i,j) de l'arbre T.
b) Vérifier que le théorème 1 est une conséquence de l'équation (1).
c) Vérifier que pour chaque x_i, il existe un terme dans $C_n(\mathbf{x})$ dont le degré en x_i est exactement 1. Vérifier que ceci est vrai également pour le membre de droite $x_1x_2\dots x_n(x_1+x_2+\dots+x_n)^{n-2}$. Que signifie-t-il en terme de degré d'arbre pour le sommet i ?

2.2 Récurrence

Notons $D_n(\mathbf{x}) = D_n(x_1,\dots,x_n) = x_1x_2\dots x_n(x_1+x_2+\dots+x_n)^{n-2}$.

$\star$ Question préliminaire: que vaut $D_4(\mathbf{x})$?

a) Notons $D_n^n(\mathbf{x})$ la somme des polynômes dans l'expression de $D_n(\mathbf{x})$ dont le degré en x_n est *exactement* 1. Que vaut $D_4^4(\mathbf{x})$?
b) Que vaut $D_n^n(\mathbf{x})$ en général ? On pourra dériver $D_n(\mathbf{x})$ par rapport à x_n puis évaluer en $x_n = 0$. En déduire une relation entre $D_n^n(\mathbf{x})$ et $D_{n-1}(\mathbf{x})$.
b) Si n est une feuille dans un arbre couvrant de $\{1,\dots,n\}$, qu'obtient-on si l'on enlève l'arête qui relie n au reste de l'arbre ?
c) Trouver une relation qui permet de relier l'ensemble des arbres couvrants de $\{1,\dots,n\}$ dont le degré du sommet n est exactement 1 à l'ensemble des arbres couvrants de $\{1,\dots,n-1\}$ (i.e. $\mathcal{T}_{n-1}$).
d) En déduire une relation entre $C_n^n(\mathbf{x})$ et $C_{n-1}(\mathbf{x})$, où $C_n^n(\mathbf{x})$ est la somme des polynômes dans l'expression de $C_n(\mathbf{x})$ dont le degré en x_n est *exactement* 1..
e) Conclure soigneusement.

Références

[1] *M. Aigner et G. Ziegler*, **Proof from THE BOOK**, "Cayley's formula for the number of trees".
[2] *M. Haiman*, "Notes on the Matrix-Tree theorem and Cayley's tree enumerator".
[3] *A. Cayley*, **Quart. J. Math.**, "A Theorem on Trees".