Combinatoire énumérative

Exercice 1. On dispose d'une urne qui contient $n \geqslant 1$ boules numérotées de 1 à n.

1. On tire successivement p boules de l'urne, sans les remettre dans l'urne à chaque fois. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. On tire successivement p boules de l'urne en remettant chaque fois dans l'urne la boule que l'on vient de tirer. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
3. On tire simultanément p boules de l'urne. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Correction :

1. On note dans une p-liste les numéros qui sont sortis consécutivement. Puisqu'on ne remet pas les boules à chaque tirage, les éléments de la p-liste sont distincts. Il s'agit d'un arrangement de p éléments. Il y a donc A_n^p tirages possibles.
2. Contrairement au cas précédent, on a remis les boules dans l'urne à chaque fois. Il y a donc n^p tirages possibles.
3. Il s'agit de compter le nombre de façon de choisir p boules distinctes parmi n boules. Il y a donc $\binom{n}{p}$ tirages possibles.

Exercice 2. Montrer que, pour tous $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Correction : *Première méthode :* On utilise la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ et le résultat en découle immédiatement.
Deuxième méthode : On remarque que choisir k éléments parmi n revient à choisir $n-k$ éléments parmi n qu'on ne choisira pas.

Exercice 3. Montrer que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\displaystyle k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Correction : *Première méthode :* On utilise la formule exprimant $\binom{n}{k}$:

$$\binom{k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire en comptant de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k ayant un élément distingué (qu'on appellera chef).

- on peut d'abord choisir un sous-ensemble de cardinal k ($\binom{n}{k}$ choix), puis de choisir un chef (k choix indépendants). On obtient donc $k\binom{n}{k}$ possibilités.
- ou bien, on peut d'abord choisir d'abord un chef (n choix) puis choisir un sous-ensemble de cardinal $k-1$ parmi les $n-1$ éléments restant ($\binom{n-1}{k-1}$ choix). On obtient donc $n\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$. Pour quelles valeurs de $k \in [\![0, n]\!]$, la quantité $\displaystyle\binom{n}{k}$ est-elle maximale ?

Correction : Posons $u_k = \binom{n}{k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} = \frac{n-k+1}{k} \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad k \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Si n est pair alors u_k est maximal quand $k = n/2$. Si n est impair alors u_k est maximal quand $k = (n+1)/2$... mais aussi quand $k = (n-1)/2$ puisque $\binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$.

Exercice 5 (formule de Pascal). Soient $0 \leqslant k \leqslant n$ avec $(k, n) \neq (0, 0)$. Montrer que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Correction : *Première méthode :* On utilise la formule :

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}(n-k+k)=\binom{n}{k}.$$

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire. Considérons l'ensemble $[\![1,n]\!]$ et dénombrons ses sous-ensembles à k éléments. Il y en a $\binom{n-1}{k}$ qui ne contiennent pas n et il y en a $\binom{n-1}{k-1}$ qui contiennent n. Le résultat en découle.

Exercice 6. Construire le triangle de Pascal limité à $n=10$.

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Exercice 7. Montrer, de deux façons différentes que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.$$

Correction : *Première méthode :* Par récurrence sur n. Pour $n=1$, le résultat est clair. Supposons que le résultat est vrai au rang n et montrons-le au rang $n+1$. En utilisant un changement de variable et la formule de Pascal,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} &= 2+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) && \text{(formule de Pascal)}\\ &= 2+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} && \text{(changement de variable)}\\ &= 2+(2^n-1)+(2^n-1)=2^n && \text{(hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire en comptant le nombre N de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$.

- D'une part, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles à k éléments. En sommant le tout, on voit que $N=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.
- D'autre part, pour construire un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$, on a le choix de choisir 1 ou non, 2 ou non, et ainsi de suite jusqu'à n. On a donc $N=2^n$, ce qui conclut.

Exercice 8. Soient x et y des nombres réels. Donner le développement de $(x+y)^{10}$.

Correction : On utilise la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal.

$$(x+y)^{10}=x^{10}+10x^9y+45x^8y^2+120x^7y^3+210x^6y^4+252x^5y^5+210x^4y^6+120x^3y^7+45x^2y^8+10xy^9+y^{10}.$$

Exercice 9. Quel est le terme maximum dans le développement de $(17+38)^{23}$?

Correction : D'après la formule du binôme de Newton,

$$(17+38)^{23}=\sum_{k=0}^{n}u_k,\qquad \text{avec}\qquad u_k=\binom{23}{k}17^k38^{23-k},\ k\in[\![0,23]\!].$$

Pour tout $k\in[\![0,22]\!]$,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{23-k}{k+1}\,\frac{17}{38}\geqslant 1\quad\iff\quad k\leqslant\frac{336}{55}\approx 6,11.$$

Ainsi la suite $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant 23}$ est croissante pour $k\in[\![0,7]\!]$ et décroissante pour $k\in[\![7,23]\!]$. Le terme maximal est donc

$$u_7=\binom{23}{7}17^738^{16}\approx 1,9\times 10^{39}.$$

Exercice 10. Montrer, de deux façons différentes que, pour tous $0\leqslant p\leqslant n$,

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}.$$

Correction : *Première méthode :* Par récurrence sur n. Pour $n=p$, le résultat est clair. Supposons que le résultat est vrai au rang n et montrons-le au rang $n+1$.

$$\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}+\binom{n+1}{p}=\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p}=\binom{n+2}{p+1},$$

d'après la formule de Pascal. D'où le résultat par récurrence.

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire. Remarquons d'abord que, si on choisit $p+1$ éléments distincts parmi $n+1$ alors, le maximum d'entre eux appartient à $[\![p+1,n+1]\!]$.

Pour choisir $p+1$ entiers distincts de $[\![1,n+1]\!]$, on peut d'abord choisir le maximum $k+1\in[\![p+1,n+1]\!]$ d'entre eux, puis choisir arbitrairement les autres p entiers dans $[\![1,k]\!]$. Le nombre de possibilités est donc

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\cdots+\binom{n}{p}.$$

Remarque : Pour écrire cette preuve de façon plus rigoureuse on écrit que l'ensemble des combinaisons de $p+1$ éléments de $[\![1,n+1]\!]$ s'écrit comme l'union disjointe des ensembles

$$A_k=\{(a_1,\dots,a_p,k+1)\in\mathbb{N}^{p+1}:1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_p<k+1\},\quad k\in[\![p,n]\!].$$

Exercice 11. Soit $n\geqslant 1$. Quel est le cardinal moyen d'un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$?

Correction : Le cardinal moyen S_n d'un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$ est donné par la formule

$$S_n=\frac{1}{2^n}\sum_{A\subset[\![1,n]\!]}\operatorname{card}(A).$$

Première méthode : On regroupe un ensemble avec son complémentaire. Si $A\subset[\![1,n]\!]$, on note A^c l'ensemble des entiers de $[\![1,n]\!]$ qui ne sont pas dans A. On a

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2^n}\sum_{A\subset[\![1,n]\!]}\operatorname{card}(A^c)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{A\subset[\![1,n]\!]}\operatorname{card}(A)+\frac{1}{2^n}\sum_{A\subset[\![1,n]\!]}\operatorname{card}(A^c)\right)\\&=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{A\subset[\![1,n]\!]}\big(\underbrace{\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(A^c)}_{=n}\big)=\frac{1}{2^{n+1}}2^nn=\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

Seconde méthode : On a aussi

$$S_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{A\subset[\![1,n]\!]\\ \text{card(A)=k}}}\operatorname{card}(A)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k.$$

Il s'agit de calculer cette somme. Il y a plusieurs façons de le faire :

- On peut commencer par étudier les premiers cas. On trouve toujours $S_1 = 1/2$, $S_2 = 1$, $S_3 = 3/2$... On conjecture que $S_n = n/2$ pour tout $n \geqslant 1$. On peut le montrer par récurrence.
- On a
$$S_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}n = \frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = \frac{n}{2^n}2^{n-1} = \frac{n}{2}.$$
- Considérons la fonction polynomiale
$$P_n : x \longmapsto (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$
D'après la formule du binôme de Newton, $P_n(x) = (1+x)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad n(1+x)^{n-1} = P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$
En particulier $S_n = 2^{-n}\,P_n'(1) = 2^{-n}\,n2^{n-1} = n/2$.

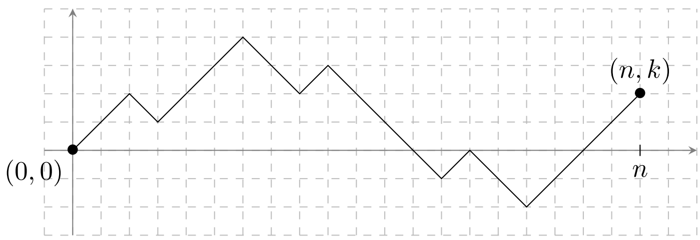
Exercice 12. Montrer (par double comptage) que, pour tous $0 \leqslant p \leqslant n$,
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}2^{n-p}.$$

Correction : On remarque d'abord que seuls les $k \geqslant p$ contribuent de manière non nulle. On va procéder à un double comptage en comptant le nombre N de sous-ensembles A, B de $[\![1, n]\!]$ tels que $A \subset B$ et $\mathrm{card}(A) = p$.

- D'une part, pour construire A et B on peut d'abord choisir A de cardinal p ($\binom{n}{p}$ choix), puis rajouter un sous-ensemble quelconque de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ privé des éléments de A, (cet ensemble possède $n-p$ éléments, ce nombre étant indépendant du choix de A, donc il y a 2^{n-p} choix). Ainsi $N = \binom{n}{p}2^{n-p}$.
- D'autre part, pour construire A et B on peut d'abord choisir B de cardinal quelconque entre p et n (si B est de cardinal k, il y a $\binom{n}{k}$ choix), puis choisir A de cardinal p comme sous-ensemble de B ($\binom{k}{p}$ choix si B est de cardinal k). Ainsi $N = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

Exercice 13.

1. Soient n et k dans $\mathbb{N}$. Combien y a-t-il de chemins sur $\mathbb{Z}^2$ issus de $(0,0)$, faisant des pas $(1,0)$ ou $(0,1)$, et finissant en (n,k) ?
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Combien y a-t-il de chemins dans le plan issus de $(0,0)$, faisant des pas $(1,1)$ ou $(1,-1)$, et finissant en (n,k) ?



Correction :

1. Un tel chemin doit faire $n+k$ pas, dont n fois $(1,0)$ et k fois $(0,1)$. Il suffit donc de choisir parmi les $n+k$ pas possibles la position des n qui font $(1,0)$. Le nombre total vaut donc $\binom{n+k}{n}$.
2. Notons $\{(0,0) \rightsquigarrow (n,k)\}$ l'ensemble des chemins dans le plans issus de $(0,0)$, faisant des pas $(1,1)$ ou $(1,-1)$, et finissant en (n,k).

   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons P_i l'ordonnée du chemin au i-ième pas. On remarque que $P_1 \in \{-1, 1\}$, $P_2 \in \{-2, 0, 2\}$, $P_3 \in \{-3, -1, 1, 3\}$, etc. Par récurrence, on montre que
$$P_n \in \{-n, -n+2, -n+4, \dots, n-4, n-2, n\}.$$
   En particulier, si $|k| > n$ ou si k n'a pas la même parité que n, alors $\mathrm{card}\big(\{(0,0) \rightsquigarrow (n,k)\}\big) = 0$.

   Supposons que $|k| \leqslant n$ et que k a la même parité que n. Appelons montée un pas $(1,1)$ et descente un pas $(1,-1)$. Un chemin de $\{(0,0) \rightsquigarrow (n,k)\}$ consiste en une succession de p montées et q descentes vérifiant : $p+q=n$ et $p-q=k$. On en déduit que $p=(n+k)/2$ et $q=(n-k)/2$. Pour construire un chemin de $\{(0,0) \rightsquigarrow (n,k)\}$, il s'agit de choisir les instants où ont lieu les p montées. Ainsi

$$\mathrm{card}\big(\{(0,0) \rightsquigarrow (n,k)\}\big) = \binom{n}{p} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$$

Exercice 14. De combien de manières peut-on placer 5 pièces identiques dans 3 poches différentes ?

Correction : Considérons la figure suivante :

$$| \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad |$$

Remplaçons chaque $\times$ soit par une pièce ($\circ$), soit par une barre ($|$) de sorte qu'il y ait en tout 2 barres et 5 pièces. Les pièces entre les deux premières barres seront contenues dans la première poche, les pièces entre la deuxième barre et la troisième barre seront contenues dans la seconde poche, et finalement les pièces entre la troisième barre et la quatrième barre seront contenues dans la troisième poche. Par exemple, si on met 2 pièces dans la première poche, 0 dans la deuxième et 3 dans la troisième, alors on dessine :

$$| \quad \circ \quad \circ \quad | \quad | \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad |$$

Ainsi, placer 5 pièces identiques dans 3 poches différentes, revient à choisir la position des 2 barres parmi 7 positions possibles. La réponse est donc $\binom{7}{2} = 21$.

Exercice 15. En s'inspirant de la preuve précédente, compter

1. le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes,
2. le nombre de p-uplets $(r_1,\dots,r_p)$ d'éléments de $[\![0,n]\!]$ tels que $r_1+\cdots+r_p=n$,
3. le nombre de tirages avec remise et non ordonnés de p boules dans une urne contenant $n \geqslant 1$ boules numérotées de 1 à n.

Correction :

1. En généralisant la preuve de l'exercice précédent, on voit qu'il s'agit du nombre de façons de placer p barres parmi $n+p-1$ positions possibles, c'est-à-dire $\binom{n+p-1}{p}$.
2. Il y a $\binom{n+p-1}{p}$ p-uplets vérifiant cette condition. En effet, remarquons que

$$n = r_1+r_2+\cdots+r_p = \underbrace{1+\cdots+1}_{r_1 \text{ fois}} + \underbrace{1+\cdots+1}_{r_2 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{1+\cdots+1}_{r_p \text{ fois}}.$$

   Ainsi on se ramène à la situation précédente : ici les 1 jouent les rôles des pièces, on a p poches et on cherche à savoir combien il y a de façons de mettre r_1 pièces dans la première poche, r_2 dans la deuxième, etc. On trouve à nouveau $\binom{n+p-1}{p}$ façons possibles.
3. On tire p boules avec remise. On peut imaginer qu'il y a n poches et que l'on met les boules tirées numérotées 1 dans la poche 1, les boules tirées numérotées 2 dans la poche 2, etc. Le nombre de tirages avec remise et non ordonnés de p boules dans cette urne est donc égal au nombre de façons de placer p boules dans n poches différentes, c'est-à-dire $\binom{n+p-1}{p}$.

Formule d'inclusion-exclusion.

Si $A_1,\dots,A_n$ sont des ensembles finis, alors :

$$\mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

Dans le cas où $n=3$, cette formule devient :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathrm{card}(A_1)+\mathrm{card}(A_2)+\mathrm{card}(A_3)\\ &\quad -\mathrm{card}(A_1\cap A_2)-\mathrm{card}(A_1\cap A_3)-\mathrm{card}(A_2\cap A_3)+\mathrm{card}(A_1\cap A_2\cap A_3).\end{aligned}$$

Démonstration...pour les plus courageux. Par récurrence sur n. Si $n=1$ alors

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\operatorname{card}\left(A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_k}\right)=(-1)^2\sum_{1\leqslant i\leqslant 1}\operatorname{card}\left(A_i\right)=\operatorname{card}\left(A_1\right).$$

Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang n. Montrons-là au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n+1})\\&\qquad=\operatorname{card}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)+\operatorname{card}(A_{n+1})-\operatorname{card}\big((A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cap A_{n+1}\big)\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que

$$\begin{aligned}-\operatorname{card}\big((A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cap A_{n+1}\big)&=\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right)\\&=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\operatorname{card}\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{n+1}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+2}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k+1}\leqslant n+1\\ i_{k+1}=n+1}}\operatorname{card}\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{i_{k+1}}\right)\\&=\sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j+1}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_j\leqslant n+1\\ i_j=n+1}}\operatorname{card}\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}\right)\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\operatorname{card}\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1\\ i_k\neq n+1}}\operatorname{card}\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n+1})\\&\quad=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n+1}\operatorname{card}(A_{i_1})+(-1)^{n+2}\operatorname{card}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n+1})\\&\qquad+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1\\ i_k\neq n+1}}\operatorname{card}\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)+\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1\\ i_k=n+1}}\operatorname{card}\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\right)\\&\quad=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1}\operatorname{card}\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right).\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence. □

Exercice 16. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 et qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 ?

Correction : Notons D_3 (resp. D_5, resp. D_7) l'ensemble des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 divisibles par 3 (resp. 5, resp. 7). On cherche

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(D_3^c\cap D_5^c\cap D_7^c)&=120-\operatorname{card}(D_3\cup D_5\cup D_7)\\&=120-\Big(\operatorname{card}(D_3)+\operatorname{card}(D_5)+\operatorname{card}(D_7)-\operatorname{card}(D_3\cap D_5)\\&\qquad-\operatorname{card}(D_3\cap D_7)-\operatorname{card}(D_5\cap D_7)+\operatorname{card}(D_3\cap D_5\cap D_7)\Big).\end{aligned}$$

On calcule $\operatorname{card}(D_3^c\cap D_5^c\cap D_7^c)=120-(40+24+17-8-5-3+1)=54$.

Exercice 17. Par temps de pluie, chacun des n élèves de *Paris Maths* laisse son parapluie à l'entrée de la salle. A 18h, ils repartent chez eux en prenant un parapluie au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne se retrouve avec son parapluie ?

Correction : On assigne à chaque élève un nombre différent entre 1 et n, et on note x_i le numéro de l'élève prenant le i-ième parapluie. Ainsi $(x_1, \ldots, x_n)$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$. Calculons plutôt la probabilité qu'au moins une personne retrouve son parapluie en vue d'utiliser le principe d'inclusion-exclusion. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, posons A_i l'ensemble des permutations telles que $x_i = i$. Il est clair que pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, on a :

$$\operatorname{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!.$$

Ainsi, d'après la formule d'inclusion-exclusion :

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.
\end{aligned}$$

La probabilité cherchée est

$$1 - \frac{1}{n} \operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Exercice 18. Soient $0 \leqslant p \leqslant n$. Quel est le nombre de permutations de n éléments qui laissent fixes exactement p éléments ?

Correction : Pour obtenir une permutation de n éléments qui laissent fixes exactement p éléments, on choisit p éléments qui vont rester fixes ($\binom{n}{p}$ choix) et $n-p$ éléments qui ne vont pas rester fixes. On se retrouve alors dans la même situation que l'exercice précédent ($n-p$ élèves qui vont tous prendre un parapluie différent en sortant). On a calculé que ce nombre est égal à

$$(n-p)! \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Le nombre de permutations de n éléments qui laissent fixes exactement p éléments est dont égal à

$$\binom{n}{p} (n-p)! \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Inspiré du cours de préparation aux Olympiades par Igor Kortchemski.