Permutations

26 février 2017

Ce document reprend la feuille d'exercices donnée lors de la séance débutants du 25 février 2017, avec la correction de l'exercice 9, comme promis. Toutes mes excuses également : dans la première version j'avais oublié l'hypothèse d'associativité dans la définition d'un groupe, c'est maintenant corrigé.

1 Permutations

Exercice 1. *Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble* $\{1, 2, ..., n\}$ *?*

Exercice 2. *Dans* $\mathfrak{S}_5$*, que donne le résultat de la composition de* $\sigma = \{1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 1, 4 \to 5, 5 \to 2$ *et* $\tau = \{1 \to 4, 2 \to 2, 3 \to 5, 4 \to 3, 5 \to 1\}$ *?*

Exercice 3. *Décrire toutes les permutations de* $\mathfrak{S}_3$*.*

Exercice 4. *Montrer que* $\mathfrak{S}_n$ *est un groupe pour la composition, c'est-à-dire que les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

- *si* σ*,* σ' *et* σ'' *sont trois permutations de* $\mathfrak{S}_n$*, alors* $(\sigma \circ \sigma') \circ \sigma'' = \sigma \circ (\sigma' \circ \sigma'')$
- *il existe un élément* $e \in \mathfrak{S}_n$ *tel que pour toute permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$*,* $\sigma \circ e = e \circ \sigma = \sigma$
- *pour toute permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$*, il existe une autre permutation* $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$ *telle que* $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma = e$

Exercice 5. *Montrer qu'en itérant une permutation, on finit toujours par retomber sur l'identité en un nombre fini d'étapes. On dit que le plus petit nombre d'étapes pour retomber sur l'identité est* l'ordre *de la permutation.*

2 Cycles

Exercice 6. *Ecrire les permutations* σ *et* τ *de l'exercice 1 comme produits de cycles à supports disjoints.*

Exercice 7. *Montrer que toute permutation peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints.*

Exercice 8. *Montrer que les transpositions, c'est-à-dire les 2-cycles, forment un système générateur de* $\mathfrak{S}_n$*. Autrement dit, toute permutation de* $\mathfrak{S}_n$ *peut s'écrire comme produit de transpositions.*

Exercice 9. *Comment peut-on calculer l'ordre d'une permutation ?*

Solution 1. *Remarquons déjà que l'ordre d'un cycle correspond à sa longueur. En effet, on a vu qu'un cycle est de la forme* $c = (a\ \sigma(a)\ \sigma^2(a) \dots \sigma^{k-1}(a))$ *où* k *est le plus petit entier tel que* $\sigma^k(a) = a$*. Alors tous les élements du support de* c *sont également de période* k *et comme les éléments qui ne sont pas dans le support de* c *ne sont pas modifiés par* c*,* k *est bien le plus petit entier tel que* $\sigma^k = Id$*.*

On considère maintenant une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *quelconque. On a vu que* σ *pouvait s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints* c_1*,* c_2*, ...,* c_r*, de longueurs respectives* k_1*,* k_2*, ...,* k_r*. Si* k *est un entier vérifiant* $\sigma^k = Id$*, si on prend un élément* a_i *dans le support de* c_i*, on doit avoir* $\sigma^k(a_i) = a_i$*, donc* k *est un multiple de* k_i*. L'ordre de* σ *est donc finalement le plus petit multiple commun (PPCM) des* k_1*,*k_2*, ...,* k_r*.*

3 Permutations paires ou impaires

Exercice 10. *Montrer que la composition de permutations vérifie la "loi de multiplication" suivante :*
- *paire* $\times$ *paire* $=$ *paire*
- *paire* $\times$ *impaire* $=$ *impaire*
- *impaire* $\times$ *paire* $=$ *impaire*
- *impaire* $\times$ *impaire* $=$ *paire*

Exercice 11. *Déterminer la parité des permutations* σ *et* τ *de l'exercice 1.*

Exercice 12. *Déterminer la parité d'un cycle de longueur* k*.*

Comment peut-on obtenir la parité d'une permutation à partir de sa décomposition en cycles à supports disjoints ?

4 D'autres exemples de permutations

Exercice 13. *Déterminer l'ensemble des symétries d'un triangle équilatéral. Est-ce un exemple de groupe de permutations ?*

A-t-on un résultat similaire pour l'ensemble des symétries du carré ?

Trouver un objet géométrique dont l'ensemble des symétries "correspond" à $\mathfrak{S}_4$*.*

5 Quelques problèmes

Exercice 14. *Samuel Loyd avait-il une chance de perdre ses* 1000$ *?*

Exercice 15. *Pour un élément* $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ *et une permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$*, on appelle* période *de* x *le nombre minimal d'étapes pour que* x *revienne à sa place en itérant* σ*. Quelle est la période moyenne de* 1 *?*

Exercice 16. *Un groupe de* n *personnes possédant toutes des chapeaux identiques assiste à une conférence. A la fin, chacune repart en emportant un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité pour que personne n'ait récupéré son propre chapeau ?*

Exercice 17. *100 prisonniers, numérotés de 1 à 100, sont soumis à l'épreuve suivante : dans une pièce se trouvent 100 boîtes contenant contenant un nombre entre 1 et 100 (chaque nombre est utilisé exactement une fois). A tour de rôle, les prisonniers peuvent entrer dans la pièce et ouvrir successivement 50 boîtes. S'ils ne trouvent pas leur numéro, tous les prisonniers sont condamnés mais sinon, les boîtes sont refermées et c'est au prochain de tenter sa chance. Si à la fin tous les prisonniers ont trouvé leur numéro, tous les prisonniers sont libérés.*

Montrer que les prisonniers peuvent établir une stratégie pour avoir plus de 30% *de chances d'être libérés.*