Dérivation, EDO et EDP

Cyril Letrouit*

3 décembre 2016

1 Dérivation

Exercice 1. (Théorème de Rolle) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et admettant en $-\infty$ et $+\infty$ une même limite finie. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 3. (Equation fonctionnelle de Cauchy) Trouver toutes les applications dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice(*) 4. (Théorème de Darboux) Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Montrer que $f'(I)$ est un intervelle de $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Démontrer les inégalités suivantes.
(a) $\forall x \geq 0, \qquad x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
(b) $\forall x \geq 0, \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
(c) $\forall x \geq 0, \qquad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Exercice(**) 6. (Fonction continue nulle part dérivable) On note Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique, dont la restriction à $[-1/2, 1/2]$ vérifie $\Delta(x) = |x|$. Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$$

est continue mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice(*) 7. Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{n} k \cos(kx)$$

Exercice(*) 8. Calculer la dérivée d'ordre n de $x^n(1-x)^n$. En déduire

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$$

*cyril.letrouit@ens.fr

2 Equations différentielles

Exercice 9. 1) Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
2) En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$.

Exercice(*) 10. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$.

Exercice(**) 11. Trouver toutes les applications f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = f(\frac{1}{x}).$$

Exercice(**) 12. (Lemme de Gronwall) Soient ψ et $y : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues et $c \geq 0$ vérifiant

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right).$$

Exercice 13. Une des théories actuelles de l'univers (théorie du big-bang) admet que l'origine de l'univers est une gigantesque explosion à partir de laquelle la matière de l'univers a commencé à diverger à partir du point 0. On considère que cet expansion est homogène et isotrope ; les positions successives se déduisent les unes des autres par une homothétie de centre 0 :

$$O\vec{M}(t) = \lambda(t, t_0)O\vec{M}(t_0).$$

(1) Montrer que la vitesse du point M se met sous la forme

$$\vec{v}(M) = H(t)O\vec{M}(t)$$

où l'on explicitera $H(t)$. C'est la loi de Hubble.

(2) Montrer que la loi de Hubble est incompatible avec une valeur constante de H.

(3) La valeur actuelle de H est environ $2,5 \times 10^{-18}s^{-1}$. En prenant comme modèle $H(t) = \alpha/t$ (où α est à déterminer), trouver l'ordre de grandeur du rayon maximal de l'univers (on rappelle la vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$).
En déduire l'âge de l'univers selon cette théorie.

Référence : Emmanuel Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications.*

3 Equations aux dérivées partielles

Exercice 14. Démontrer avec les multiplicateurs de Lagrange l'inégalité arithmético-géométrique : pour $x_1, ..., x_n$ des réels positifs, on a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n\sqrt[n]{x_1 ... x_n}$$

Exercice 15. Trouver le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6.$$

Exercice(*) 16. Soient x et y des réels strictement positifs tels que $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Montrer que $x^3 + y^3 \leq 2$.