Parimaths : autour du théorème de Monsky

23 mars 2017

1 Échauffement : quelques problèmes d'équidissection

Soit $\mathcal{P}$ un polygone dans le plan. On se pose la question suivante : pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ peut-on découper $\mathcal{P}$ en n triangles d'aires égales ? On dit que $\mathcal{P}$ est n-*découpable* si un tel découpage existe.

Exercice 1. Montrer que si $\mathcal{P}$ est n-découpable, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}$ est mn-découpable.

L'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathcal{P}$ est n-découpable est appelé le *spectre* de $\mathcal{P}$.

Exercice 2. Existe-t-il un polygone $\mathcal{P}$ dont le spectre n'est pas de la forme $m\mathbb{N}^*$ pour un certain entier m ?

Exercice 3. Montrer que tout polygone à coordonnées rationnelles est de spectre non vide.

Théorème de Monsky. *Le spectre du carré est* $2\mathbb{N}^*$.

Le but de la séance est de présenter la démonstration de ce résultat.

2 Boîte à outils

2.1 Valeurs absolues ultramétriques

Définition. Une *valeur absolue* sur un corps K est une application $v : K \to \mathbb{R}_+$ telle que :
(i) $v(x) = 0 \iff x = 0$
(ii) $\forall x, y \in K$, $v(xy) = v(x)v(y)$
(iii) $\forall x, y \in K$, $v(x + y) \leq v(x) + v(y)$.

Une *valeur absolue ultramétrique* sur K est une application $v : K \to \mathbb{R}_+$ vérifiant (i), (ii) et l'hypothèse supplémentaire :
(iii') $\forall x, y \in K$, $v(x + y) \leq \max(v(x), v(y))$.

Exercice 4. Vérifier que toute valeur absolue ultramétrique est bien une valeur absolue. Donner des exemples de valeurs absolues ultramétriques sur $\mathbb{Q}$. À votre avis, existe-t-il des valeurs absolues ultramétriques sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 5. Soit v valeur absolue ultramétrique sur un corps K. Montrer que :

$$\forall x, y \in K,\ v(x) \neq v(y) \Longrightarrow v(x + y) = \max(v(x), v(y)).$$

2.2 Lemme de Sperner

Soit RVB un triangle dans le plan. On en définit une triangulation $\mathcal{T}$ et on colorie chaque sommet de $\mathcal{T}$ en rouge, en bleu ou en vert de sorte que :
- R est rouge, V est vert, B est bleu ;
- tout sommet de $\mathcal{T} \cap [RV]$ est, au choix, rouge ou vert (et de même pour $[VB]$ en vert et bleu et $[BR]$ en bleu et rouge).

On dit qu'un petit triangle de la triangulation $\mathcal{T}$ est *multicolore* si ses trois sommets sont de trois couleurs différentes. On a alors le résultat suivant :

Lemme de Sperner. *Le nombre de petits triangles multicolores de $\mathcal{T}$ est impair.*

On présente deux preuves de ce lemme, l'une reposant sur un double comptage astucieux, la seconde sur un argument de type « path-finding ». Pour plus de détails, voir les références *infra*.

Exercice 6. Que se passe-t-il si on remplace RVB par un polygone quelconque dans l'énoncé du lemme ?

3 Théorème de Monsky

Voici quelques éléments permettant de recoller les morceaux ; pour plus de détails, voir les références *infra*.

Admettons qu'on dispose d'une valeur absolue ultramétrique v qui prolonge la valeur absolue 2-adique à $\mathbb{R}$ (on peut en discuter à la fin si le temps le permet).

Exercice 7. Si n est impair, montrer que $v\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

On définit le coloriage du carré suivant : pour tout $x, y \in [0,1]$,

$$(x,y) \text{ est } \begin{cases} \text{rouge} & \text{si } v(x) \geq v(y) \text{ et } v(x) \geq 1, \\ \text{vert} & \text{si } v(x) < v(y) \text{ et } v(y) \geq 1, \\ \text{bleu} & \text{si } v(x) < 1 \text{ et } v(y) < 1. \end{cases}$$

Exercice 8. Que peut-on dire des couleurs de trois points qui sont alignés (indication : trois points alignés sont trois points qui forment un triangle d'aire nulle) ?

Exercice 9. Que dire de l'aire d'un triangle dont les trois sommets sont de trois couleurs différentes (indication : considérer sa valeur absolue ultramétrique) ?

Exercice 10. Conclure la preuve du théorème de Monsky.

Exercice 11. Existe-t-il un polygone de spectre vide ?

4 Sujets liés

Selon le temps restant et les préférences de chacun, on peut continuer la discussion sur :

- des résultats plus récents d'équidissection ;
- un peu de théorie des valuations ;
- d'autres jolies applications du lemme de Sperner.

5 Pour aller plus loin...

Vous pouvez notamment lire, regarder, feuilleter les documents suivants :

- le chapitre de *Proofs from the Book* d'Aigner et Ziegler traitant du théorème de Monsky (c'est plus ou moins ce qu'on fait, avec en plus une annexe sur les extensions de valeurs absolues ultramétriques ; attention toutefois, cette annexe est plus technique et utilise des outils non élémentaires) ;
- une vidéo sur une preuve du lemme de Sperner et une jolie application aux problèmes de partage : `https://www.youtube.com/watch?v=7s-YM-kcKME` ;
- la page Wikipédia sur l'équidissection, qui résume les avancées dans ce domaine et fournit les références idoines (attention, c'est déjà plus compliqué !).