PariMath: Séance du 29 Avril 2017

Rémy Mahfouf (remy.mahfouf@ens.fr)

Références

- Cours de Temps de mélange 2016-2017 Mathieu Merle (DMA ENS)
- TD de Processus Stochastiques 2016-2017 de Thomas Budzinski (DMA ENS)
- L'immense (par la taille et l'esprit) Cyril Letrouit (ENS ULM)

Marches aléatoires

- On note $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. On suppose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ avec les $X_i \sim \mathcal{R}(\frac{1}{2})$ ie $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ et les X_i mutuellement indépendantes. Montrer que (S_n) est une chaîne de Markov, donner sa matrice de transition. Montrer que la chaîne est irréductible. Est-elle apériodique?
- Calculer $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ et $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$. Donner équivalent pour $n \to \infty$. On rappelle $n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$.
- Traiter le cas de la marche biaisée de paramètre p sur $\mathbb{Z}$.
- Pour de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$, déterminer $\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0))$
- Donner le noyau de transition de la marche aléatoire sur un graphe d-régulier. Étudier $\rho_n = d_G(\xi, X_n)$ où d_G est la distance en graphe et ξ la racine.
- On considère le mélange suivant d'un paquet de $n \geq 2$ cartes : on tire uniformément deux des n cartes et on échange leurs positions respectives dans le paquet. Montrer qu'on peut modéliser la configuration du paquet par une chaîne de Markov, puis donner sa matrice de transition.

Résultats classiques et importants

- Montrer l'inégalité de Markov avec $X \geq 0$: $\mathbb{P}(X > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\epsilon}$.
- Montrer l'inégalité de Bienayme-Tchebychev :
  $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) > \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$

- Un message pouvant prendre deux formes ("oui" et "non") est transmis à travers n intermédiaires.On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$ ou le déforme en son contraire avec probabilité $1 - p$; les intermédiaires sont indépendants.Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à deux états et calculer la probabilité une l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale. Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?

- Montrer qu'une fonction harmonique sur $D \subsetneq E$ prend son maximum sur D^c. Montrer qu'une fonction harmonique sur E fini est constante.

- Un singe tape sur une machine à écrire une suite de caractères (il en tape un nouveau à chaque seconde). A l'instant n, il choisit un caractère uniformément parmi les touches sur le clavier, indépendamment des précédents. Donner le noyau de transition de la chaîne de Markov. Montrer qu'avec une probabilité 1, le singe tapera la phrase "GIGNAC EST MEILLEUR QUE MESSI" au moins une fois. On pourra comparer le temps de premier succès à celui d'une variable géométrique.

Temps de sortie On se donne $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ démarrant en 0. On fixe $a, b > 0$ des entiers.
On note $\mathcal{T}_{sortie} = \min\{t \geq 0, S_t = -a \text{ } ou \text{ } S_t = b\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- Montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{sortie} = \infty) = 0$ puis $\mathbb{P}(S_{\mathcal{T}_{sortie}} = -a) = \frac{b}{a+b}$.
On pourra étudier $f(x) = \mathbb{P}_x(S_{\mathcal{T}_{sortie}} = -a)$ où $P_x(\bullet)$ représente la loi de la chaîne telle que $S_0 = x$.

- Reprendre les mêmes questions avec la marche biaisée. On montrera que $f(x+1) - f(x) = \frac{1-p}{p}(f(x) - f(x-1))$

Étude de chaînes explicites

- On étudie la chaîne à deux état $\{1, 2\}$ qui a pour matrice de transition.

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

  - Pour quelles valeurs de (p, q) la chaîne est-elle irréductible? Apériodique?
  - Calculer la mesure invariante π , P^t pour $t \in \mathbb{N}$
  - Calculer $d_i(t)$ pour $i \leq 2$
  - Calculer $t_{mix}(\epsilon)$

- Un jeu organisé par Panini consiste à réunir la collection complète des vignettes des n joueurs participant à la Coupe du Monde de Football. On suppose que le supporter achète chaque jour un nouveau paquet de céréales et reçoit donc une nouvelle vignette, tirée indépendamment des précédentes et de manière uniforme. On note τ le nombre de jours nécessaires pour remplir complètement l'album.

  - Montrer $\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i$ avec $\tau_i \sim Geom(\frac{n-i+1}{n})$ et les τ_i mutuellement indépendants.
  - Soit $c > 0$. Montrer que :
    $\mathbb{P}(pas\ tirer\ coupon\ 1\ en\ [n\log(n)+cn]\ essais) = (1-\frac{1}{n})^{[n\log(n)+cn]}$
  - Déduire que $\mathbb{P}(\tau > [n\log(n) + cn]) \leq e^{-c}$
  - Calculer $\mathbb{E}(\tau)$ et $V(\tau)$ et donner des équivalents pour $n \to \infty$