Séance Parimaths (Groupe Débutants): Stratégies de base

27 septembre 2014

1 Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs, appelé également principe de Dirichlet (ou *pigeonhole principle* en anglais) dit que si on a des chaussettes à ranger dans des tiroirs, et qu'il y a plus de chaussettes que de tiroirs, il y aura nécessairement un tiroir qui contiendra au moins deux chaussettes.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Exercice 1 Dans le collège de Dirichletville, il y a 400 élèves. Montrer qu'il y a au moins deux élèves fêtant leur anniversaire le même jour.

Exercice 2 Dans son armoire, Gustave a des chaussettes vertes, bleues et rouges. Hélas, son petit frère dort dans la chambre et il ne peut donc pas allumer la lumière. Combien de chaussettes doit-il prendre à l'aveuglette dans l'armoire pour être sûr d'en avoir deux identiques ?

Exercice 3 Montrer que parmi les élèves du club Parimaths, il en existe deux qui connaissent le même nombre d'élèves du club.

Exercice 4 On remplit un tableau 3×3 avec les nombres $-1, 0, 1$, puis on calcule la somme des nombres dans chaque ligne, chaque colonne, et chacune des deux diagonales. Montrer que parmi les sommes obtenues, il y en a deux qui sont égales.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & -1 & 1 & \longrightarrow & 0\\
 & 1 & 1 & 1 & \longrightarrow & 3\\
 & -1 & -1 & 0 & \longrightarrow & -2\\
\swarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow & \\
1 & 0 & -1 & 2 & 1 &
\end{array}$$

Un exemple de remplissage du tableau

Exercice 5 Dans une classe il y a 25 élèves. On sait que deux filles quelconques de cette classe ne connaissent pas le même nombre de garçons de la classe. Quel est le plus grand nombre de filles qu'il peut y avoir dans cette classe ?

Exercice 6 On choisit 5 points à coordonnées entières du plan. Montrer que parmi ces points, il en existe deux qui sont les extrémités d'un segment dont le milieu est également à coordonnées entières.

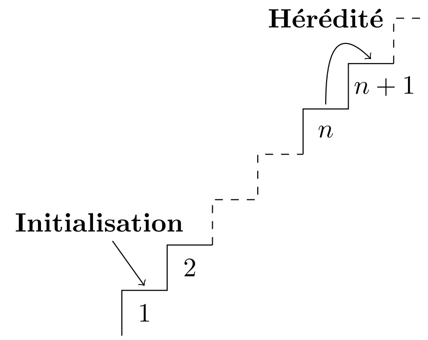
Exercice 7 Germantrude a 25 pièces d'une valeur comprise entre 1 et 10 centimes dans son porte-monnaie. Pourra-t-elle toujours trouver 7 pièces identiques parmi celles-ci ? et 8 ?

Exercice 8 Dans une salle de classe, il y a 7 rangées de 10 places. Une classe de 50 élèves y a cours le matin et l'après-midi. Montrer qu'il existe deux personnes ayant été assises dans la même rangée aussi bien le matin que l'après-midi.

2 Raisonnement par récurrence

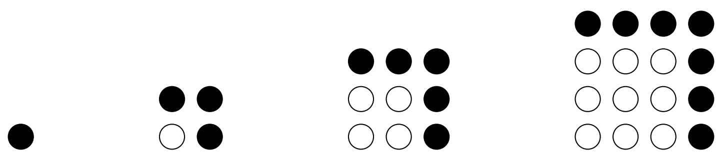
Le raisonnement par récurrence est un type de raisonnement très courant en mathématiques. Imaginez que vous êtes tout en bas d'un escalier infini dont les marches sont numérotées, disons à partir de 1. Imaginons que vous pouvez atteindre la marche numéro 1, et que, pour tout $n \geq 1$, une fois arrivés sur la marche n, vous pouvez monter sur la marche $n+1$. Ainsi, vous montez sur la marche 1, puis à partir de la marche 1 vous pouvez aller sur la marche 2, à partir de la marche 2 sur la marche 3, etc. C'est alors assez intuitif de penser que vous pouvez atteindre toutes les marches, et c'est exactement ce que dit le principe de récurrence ! Plus précisément, soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq 1$. Pour montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$, il faut :

- Vérifier que $P(1)$ est vraie. Cette étape s'appelle l'*initialisation*.
- Montrer que de $P(n)$ on peut déduire $P(n+1)$. Cette étape s'appelle l'*hérédité*, parce qu'on vérifie que l'entier $n+1$ *hérite* la propriété P de l'entier n.



La récurrence

Exercice 9 Soit $n \geq 1$. Conjecturer combien vaut, en fonction de n, la somme des n premiers entiers impairs, puis prouver la conjecture obtenue par récurrence.



Somme des premiers entiers impairs

Exercice 10

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $2^n > n$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, $n! > 2^n$.
   (Rappel : $n!$ désigne le produit des n premiers entiers, c'est-à-dire $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.)

Exercice 11 Soit $n \geq 1$ un entier. On se donne n cercles dans le plan, qui délimitent donc un certain nombre de régions du plan. Montrer que l'on peut colorier le plan à l'aide de deux couleurs de sorte que deux régions ayant une frontière commune ne soient jamais de la même couleur.

Exercice 12 Suites récurrentes Une *suite* est une succession de nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots$ numérotés. Il y a plusieurs manières de définir une suite : la première consiste à donner directement la valeur de u_n en fonction de n pour tout entier n. Par exemple, si on définit pour tout n, $u_n = n$, alors la suite (u_n) est simplement la suite de tous les entiers naturels. Une autre manière de faire est de donner pour tout n une recette pour calculer u_{n+1} à partir de u_n. Bien entendu, cela ne permet de calculer tous les termes de la suite que si on fournit également le premier terme ! Une suite définie de telle manière est appelée *suite récurrente*.

1. Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 1$. Pouvez-vous trouver une formule explicite pour u_n ? Qu'en est-il de la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + 2$?
2. Donner une formule explicite pour la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$.
3. Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = 3w_n + 2$. Montrer que pour tout n, w_n est pair.

Exercice 13 Que pensez-vous du raisonnement suivant ?

On va montrer que tous les stylos dans une trousse sont toujours de même couleur, par récurrence sur le nombre de stylos. S'il y a un seul stylo, c'est vrai. Supposons maintenant que c'est vrai pour une trousse de n stylos pour un certain entier n, et considérons une trousse contenant $n+1$ stylos. On enlève un certain stylo, et on se retrouve alors avec n stylos dans une trousse. Par hypothèse de récurrence, ils sont tous de même couleur. On remet le stylo qu'on a enlevé. S'il est de la même couleur que les autres, on a fini. Sinon, on enlève un autre stylo, et on se retrouve de nouveau avec une trousse contenant n stylos. Par hypothèse de récurrence, les stylo à l'intérieur sont tous de la même couleur. On remet maintenant le stylo qu'on a enlevé, qui est forcément de la même couleur que les autres. Ainsi, tous les stylos dans la trousse sont de la même couleur, ce qui conclut.

Exercice 14 n pirates veulent partager leur butin entre eux, sachant que chacun d'entre eux a son propre avis sur la valeur de chaque partie du butin, et que chacun veut récupérer au moins $\frac{1}{n}$ du butin (selon son point de vue). Comment doivent-ils s'y prendre ?

3 Solutions des exercices

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Il y a 366 dates d'anniversaire possibles (en comptant le 29 février...), donc comme il y a plus d'élèves que de dates possibles, le principe des tiroirs dit qu'il y a deux élèves fêtant leur anniversaire le même jour.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Il suffit qu'il prenne 4 chaussettes. En effet, comme il n'y a que 3 couleurs possibles, il y aura nécessairement 2 chaussettes de la même couleur.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soit n le nombre d'élèves du club Parimaths. Chaque élève connaît entre 0 et $n-1$ élèves (on ne le compte pas parmi ses propres connaissances). Le nombre de connaissances de chacun des n élèves peut donc prendre n valeurs différentes. Si par l'absurde deux élèves quelconques ne connaissent pas le même nombre de personnes, cela veut dire que pour tout k entre 0 et $n-1$ il existe une personne connaissant exactement k personnes. On utilise en quelque sorte une réciproque au principe des tiroirs : si n chaussettes sont reparties dans n tiroirs de sorte à ce qu'il n'y ait jamais deux chaussettes dans le même tiroir, alors il y a exactement une chaussette dans chaque tiroir. En particulier, il existe un élève qui ne connait personne, et un autre qui connait tout le monde. Contradiction, car celui qui connait tout le monde connait en particulier celui qui ne connait personne.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Les sommes calculées sont au nombre de 8 en tout : 3 pour les lignes, 3 pour les colonnes et 2 pour les diagonales. D'autre part, la somme de trois entiers compris entre -1 et 1 est comprise entre -3 et 3. Les sommes calculées ne peuvent donc prendre que des valeurs contenues dans l'ensemble $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, qui contient 7 éléments. Par le principe des tiroirs, deux de ces 8 sommes seront égales.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Soit k le nombre de filles de la classe. Alors il y a $25-k$ garçons dans la classe, et chaque fille connaît entre 0 et $25-k$ garçons. D'autre part, nous savons que deux filles quelconques connaissent un nombre de garçons différent. Si les filles sont les chaussettes, et les nombres de garçons connus possibles les tiroirs, alors nous avons k chaussettes pour $25-k+1$ tiroirs. Pour pouvoir avoir au plus une chaussette par tiroir, il faut et il suffit que $25-k+1 \geq k$, c'est-à-dire $k \leq 13$. Il y a donc au plus 13 filles dans la classe.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Rappelons que le milieu de deux points de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2) est le point de coordonnées $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Ainsi, pour que ce dernier soit à coordonnées entières, il faut et il suffit que les entiers x_1+x_2 et y_1+y_2 soient divisibles par 2. Ainsi, il faut et il suffit que x_1 et x_2 soient de même parité et que y_1 et y_2 soient de même parité.

Un point à coordonnées entières est forcément de l'une des 4 formes suivantes :

$$(\text{pair}, \text{pair}), \quad (\text{pair}, \text{impair}), \quad (\text{impair}, \text{pair}), \quad (\text{impair}, \text{impair})$$

Ainsi, parmi 5 points à coordonnées entières, par le principe des tiroirs, il y en aura deux de la même forme. Leur milieu sera alors à coordonnées entières d'après ce qu'on a dit plus haut.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Cet exercice fait appel à un raffinement du principe des tiroirs. Il y a 4 types de pièces possibles : les pièces de 1, 2, 5 ou 10 centimes. Supposons tout d'abord que Germantrude a au plus 6 pièces de chaque type. Alors elle a au plus $4 \times 6 = 24$ pièces en tout, contradiction. Donc elle a au moins 7 pièces d'un même type. D'autre part, admettons qu'elle a 7 pièces de 1 centime, 7 pièces de 2 centimes, 7 pièces de 5 centimes, ainsi que 3 pièces de 10 centimes. Alors elle a 25 pièces en tout, mais pas 8 pièces identiques.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Le matin, il y avait au moins une rangée avec 8 personnes. En effet, sinon, il y aurait eu au plus 7 personnes par rangée, et donc au plus $7 \times 7 = 49$ personnes dans la salle. Considérons donc 8 personnes ayant été dans la même rangée le matin. Puisqu'il n'y a que 7 rangées, il y en a nécessairement deux qui vont encore se retrouver dans la même rangée l'après-midi.

Autre méthode : A chaque élève on peut associer un couple (n, m) de deux entiers vérifiant $1 \leq n, m \leq 7$ donnant le numéro de sa rangée le matin et le numéro de sa rangée l'après-midi. Il y a en tout 7×7 couples possibles. Comme il y a 50 élèves, d'après le principe des tiroirs, il y en a au moins deux qui ont le même couple, donc qui étaient assis dans la même rangée le matin et le soir.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> En regardant pour les petits n, et en s'inspirant du dessin fourni on a

- Pour $n = 1$, $1 = 1^2$.
- Pour $n = 2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$.
- Pour $n = 3$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.

Nous allons donc montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\underbrace{1+3+\ldots+(2n-1)}_{\text{somme des } n \text{ premiers entiers impairs}} = n^2.$$

Appelons $P(n)$ cette propriété. L'initialisation a été faite ci-dessus, puisque nous avons vérifié $P(1), P(2), P(3)$. Supposons donc que $P(n)$ est vrai pour un certain $n \geq 1$, et déduisons-en $P(n+1)$. Nous voulons montrer

$$\underbrace{1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1)}_{\text{somme des } n+1 \text{ premiers entiers impairs}} \stackrel{?}{=} (n+1)^2.$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\underbrace{1+3+\ldots+(2n-1)}_{=n^2 \text{ d'après } P(n)} +(2n+1) = n^2+(2n+1) = (n+1)^2,$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 10

1. Appelons $P(n)$ la propriété à montrer.
   Initialisation : $2^0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain n. Ainsi, par hypothèse de récurrence $2^n > n$, ce qui peut se réécrire $2^n \geq n+1$ puisqu'il n'y a aucun entier compris strictement entre n et $n+1$. Si on multiplie le tout par 2, $2^{n+1} \geq 2(n+1)$. Or pour tout $n \geq 0$, $2(n+1) > n+1$. Donc $2^{n+1} > n+1$, ce qui conclut.
2. Pour $n \geq 4$, appelons $Q(n)$ la propriété à montrer.
   Initialisation : $4! = 24 > 2^4$ donc $Q(4)$ est vraie.

   Hérédité : Supposons que $Q(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 4$. Ainsi, par hypothèse de récurrence $n! > 2^n$. Pour faire apparaître un $(n+1)!$, on multiplie les deux côtés de l'inégalité par $(n+1)$, ce qui donne $(n+1)! > (n+1)2^n$. Or pour $n \geq 4$, $n+1 > 2$, donc $(n+1)! > 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Donc $Q(n+1)$ est vraie.

Solution de l'exercice 11 Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre n de cercles.

Initialisation : pour $n = 0$, on colorie le plan avec une couleur.

Hérédité : On suppose que la conclusion de l'exercice est vérifiée pour toute configuration de n cercles. Considérons une configuration avec $n+1$ cercles. Choisissons pour le moment un cercle et supprimons-le. On se retrouve alors avec une configuration avec n cercles, que l'on colorie par hypothèse de récurrence. On remet ensuite le cercle supprimé, et on inverse les couleurs des régions qui sont à l'intérieur de ce dernier. Ce coloriage convient. En effet, considérons deux régions ayant une frontière en commun. Si elles sont toutes les deux à l'extérieur du cercle, leurs couleurs n'ont pas été changées, donc elles sont de couleurs différentes. Si elles sont toutes les deux à l'intérieur du cercle, la couleur de chacune d'entre elles a été changée, donc elles sont également de couleurs différentes. Si elles sont de part et d'autre du cercle, elles faisaient partie d'une même région avant qu'on remette le cercle, et la couleur de l'une d'entre elles a été changée, donc elles sont également de couleurs différentes.

Solution de l'exercice 12

1. En calculant les premiers termes, on a $u_1 = u_0 + 1 = 1$, $u_2 = u_1 + 1 = 2$, donc on peut conjecturer que pour tout n, $u_n = n$. Nous allons le montrer par récurrence. Cela est vrai pour $n = 0$ par définition de u_0. Si c'est vrai pour n, alors $u_{n+1} = u_n + 1 = n + 1$, donc la propriété est héréditaire.

   De même, en calculant les premiers termes, $v_1 = v_0 + 2 = 3$, $v_2 = v_1 + 2 = 5$, on conjecture que $v_n = 2n+1$, c'est-à-dire que v_n est le $n+1$-ième entier impair. Cela est vrai pour v_0, et si c'est vrai pour n, nous avons $v_{n+1} = 2n+1+2 = 2(n+1)+1$, ce qui conclut la récurrence.
2. Nous allons montrer que pour tout n, $u_n = 2^n$. C'est vrai pour u_0, et si c'est vrai pour n, $u_{n+1} = 2u_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. La propriété à montrer est donc vraie pour tout n.
3. Nous allons raisonner par récurrence sur n. $w_0 = 0$ est pair. Fixons un certain $n \geq 0$, et supposons que w_n est pair. Puisque $w_{n+1} = 3w_n + 2$, w_{n+1} est de la même parité que $3w_n$, c'est-à-dire pair. La propriété est donc héréditaire, et w_n est pair pour tout n.

Solution de l'exercice 13 Ce raisonnement est bien entendu bancal. L'étape d'hérédité suppose en fait implicitement qu'il y a au moins 2 crayons dans la trousse que l'on peut enlever l'un après l'autre. Ainsi, l'hérédité n'est vraie qu'à partir de $n = 2$, or le raisonnement n'a été initialisé que pour $n = 1$, et pour cause : pour $n = 2$ c'est déjà faux !

Solution de l'exercice 14 Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre n de pirates. S'il y a deux pirates, il suffit que l'un d'eux partage le butin en deux (selon son point de vue). Ensuite le deuxième choisit la part qui lui paraît être plus grande. Ainsi chacun pense avoir au moins la moitié du butin (le premier pense même avoir exactement la moitié). Supposons maintenant que nous avons un moyen de partager le butin entre $n-1$ pirates, et considérons un groupe de n pirates. Mettons un pirate à part, et commençons par utiliser l'hypothèse de récurrence pour partager le butin convenablement entre les $n-1$ autres pirates.

L'autre pirate va maintenant chercher à récupérer un morceau de la part de chacun des autres pirates. Pour cela, de même que pour le cas $n = 2$, chacun d'eux partage sa part en n parties qu'il juge égales. Le dernier pirate récupère auprès de chacun de ces n pirates la partie qu'il juge être la plus grande. Ainsi, il pense avoir récupéré au moins $\frac{1}{n}$ de la part de chaque pirate, donc au moins $\frac{1}{n}$ de la valeur totale du butin. Quant aux autres pirates,par hypothèse de récurrence chacun considère qu'il a au moins $\frac{1}{n-1}$ du butin avant que le dernier pirate ne se serve, et que donc chacun des morceaux en lesquels il partage sa part vaut au moins $\frac{1}{n(n-1)}$ de la valeur totale du butin. Puisqu'il garde $n-1$ de ces morceaux, il garde au moins $(n-1) \times \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$ de la valeur du butin.