Équation de second degré et polygones de Gauss

Razvan Barbulescu

Équation de second degré

On appelle équation de second degré toute équation du type

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où $a \neq 0$. Le cas particulier $x^2 = c$ est résolu soit de manière graphique, soit par une méthode de calcul de façon que les calculatrices offrent la fonction $c \mapsto \sqrt{c}$. Pour résoudre une équation de second degré quelconque on la transforme dans une équation du type particulier qu'on sait résoudre :

$$\begin{array}{rc} & ax^2 + bx + c = 0 \\ \Leftrightarrow & a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ \Leftrightarrow & (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \\ \Leftrightarrow & X^2 = \Delta, \end{array}$$

où $X = 2ax + b$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Les solutions réelles de l'équation $X^2 = \Delta$ sont

$$\begin{array}{ll} X_1 = \sqrt{\delta} \text{ et } X_2 = -\sqrt{\delta} & \text{si } \Delta > 0 \\ X_1 = 0 & \text{si } \Delta = 0 \\ - & \text{si } \Delta < 0. \end{array}$$

Cela se répercute sur les solution de l'équation $ax^2 + bx + c$:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

où les deux solutions peuvent se confondre respectivement ne pas exister dans $\mathbb{R}$ quand $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul respectivement négatif.

Exercice 1. Trouver les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'équations suivante a deux racines x_1 et x_2 :

$$x^2 + (t-1)x + t^2 = 0.$$

Exercice 2. Dans un repère xOy on trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $(2,3)$ et rayon 5 et le cercle de centre $(-1,0)$ et rayon 4. Quelle est l'intersection des deux cercles ?

Constructions à la règle et au compas

Une figure est constructible à la règle et au compas si on peut l'obtenir en traçant uniquement des intersections de droites et de cercles.

Exercice 3. Montrer que pour une droite donnée d et un point extérieur P on peut tracer à la règle et au compas la droite d' parallèle à d qui passe par P.

Démonstration. On procède comme dans la Figure 1 :
- on dessine deux points quelconques A et B sur d ;
- on dessine le cercle de centre B et rayon $|AP|$;
- on dessine le cercle de centre P et rayon AB ;
- on nomme P' le point d'intersection des deux cercles qui est dans le même demi-plan que P par rapport à d ;
- on trace la droite d' par les points P et P'.

La justification est que $ABP'P$ est un parallélogramme. □

Exercice 4. Si on a un segment de longueur $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors, pour tout nombre rationnel positif r, on peut construire un segment de longueur $r\alpha$. En particulier on peut construire le milieu d'un segment.

Démonstration. Il suffit de donner un procédé qui coupe un segment en n partie égales, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour cela on procède comme dans la Figure 2. Soit $[AB]$ le segment à découper. On dessine un segment $[AA_1]$ et on prend le symétrique de A par rapport à A_1, ensuite le symétrique de A_1 par rapport à A_2 et ainsi de suite jusqu'à A_n. On trace la parallèle par A_1 à BA_n et on note B_1 l'intersection de cette droite avec $[AB]$. D'après le Théorème de Thalès, $|AB_1| = \frac{1}{n}|AB|$.

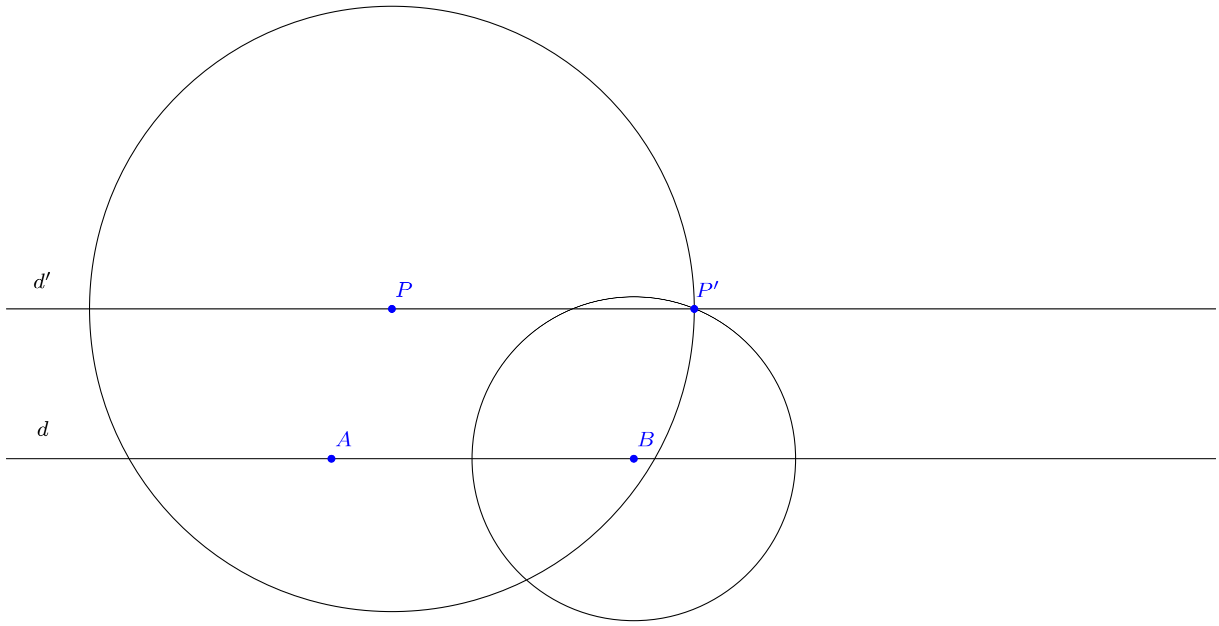

FIGURE 1 – Parallèle par un point à une droite.

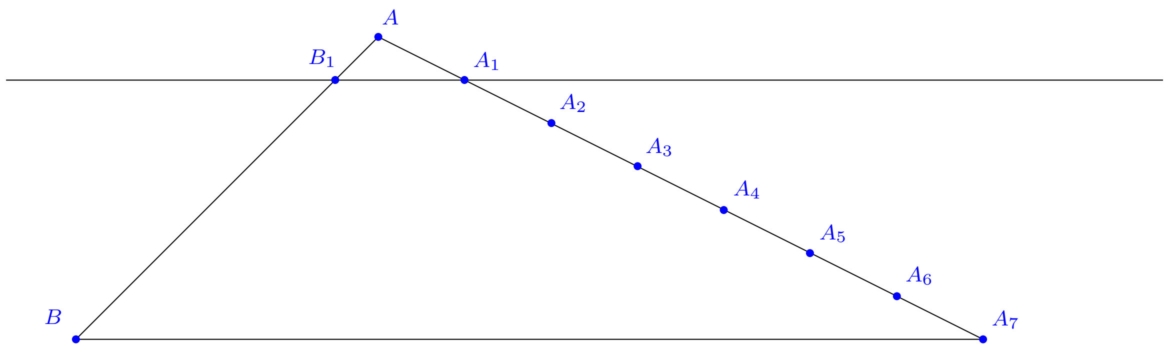

FIGURE 2 – Découpage d'en segment en sous segments égaux (ici $n = 7$).

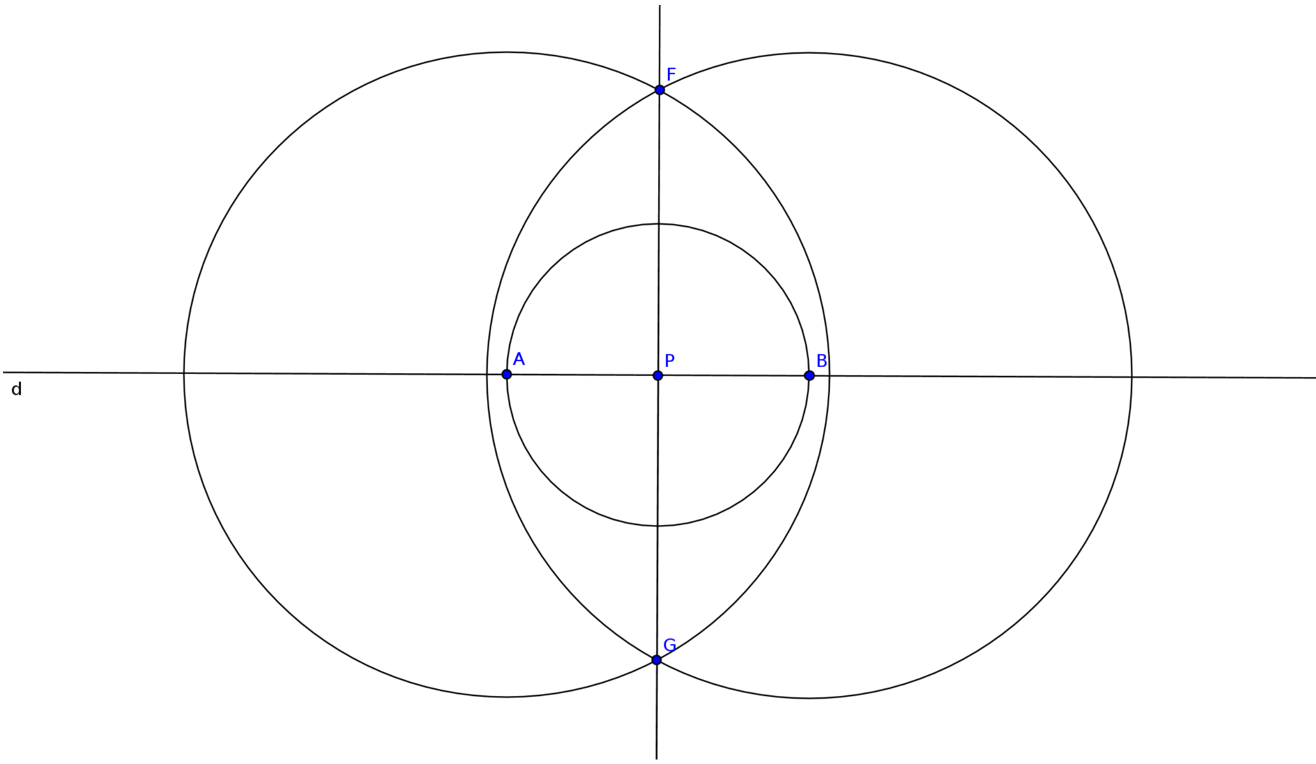

FIGURE 3 – Perpendiculaire sur une droite par un point donné.

□

Exercice 5. Montrer que pour une droite donnée d et un point $P \in d$ on peut tracer à la règle et au compas la droite d' perpendiculaire sur d qui passe par P.

Démonstration. On procède comme dans la Figure 3 :
- on dessine un cercle quelconque de centre P et on note A et B ses points d'intersection avec d ;
- on dessine un cercle de centre A et de rayon plus grand que $|AP|$;
- on dessine le cercle de centre B et de même rayon que le cercle précédent ;
- on note F et G les deux points d'intersection des cercles de centre A et respectivement B ;
- on appelle d' la droite FG.

La justification est que $AGBF$ est un losange. □

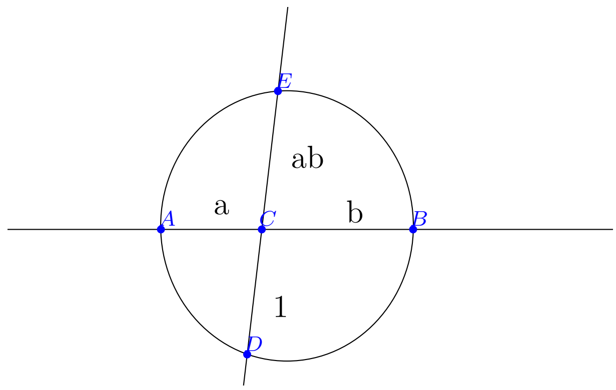

FIGURE 4 – Produit ab à partir de a et b.

Exercice 6. Si on dispose de trois segments de longueur 1, a et b, on peut construire des segments de longueur

1. ab ;
2. $1/a$.

Démonstration. 1. On procède comme dans la Figure 4 :

— on construit sur la même droite deux segments $[AC]$ et $[CB]$ de longueur a et b ;

— on place un point quelconque D à distance 1 de C et on dessine le cercle circonscrit au triangle ABD ;

— on appelle E le point d'intersection de CD avec le cercle.

Comme les points A, D, B, E sont cocycliques le Théorème de la puissance du point par rapport au cercle donne

$$|AC| \cdot |CB| = |CD| \cdot |CE|,$$

donc $|CE| = ab$.

2. On procède comme dans la Figure 5 :

— on dessine un segment $[AB]$ de longueur 2 et on appelle P son milieu ;

— on dessine la perpendiculaire sur le segment précédent qui passe par P et on choisit un point O dessus ;

— on dessine un cercle de centre O et rayon $|OA|$;

— on construit un point C à distance a de P et le cercle circonscrit au triangle ABC ;

— on appelle D l'intersection de la droite PC avec le cercle.

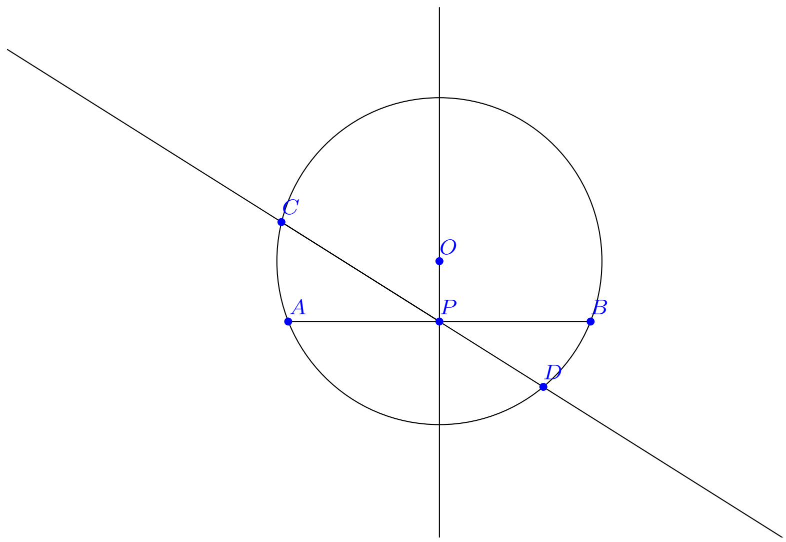

FIGURE 5 – Inverse $1/a$ à partir de a.

Comme les points A, B, C, D sont cocycliques, le Théorème de la puissance du point par rapport au cercle donne :

$$|AO| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OP|,$$

donc $|OP| = 1/a$.

$\square$

Exercice 7. Si on dispose de deux segments de longueur a et b alors on peut construire des segments de longueur $\sqrt{a^2 - b^2}$ (quand $b < a$) et $\sqrt{ab}$.

Démonstration. Pour $\sqrt{a^2 - b^2}$ on procède comme dans la Figure 6. On dessine un segment $[AC]$ de longueur b. On trace la perpendiculaire d à AB qui passe par A. On trace le cercle de centre C et rayon a. On Appelle B le point d'intersection du cercle avec d. Par le Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC on trouve que $|BC| = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Pour $\sqrt{ab}$ on procède comme dans la Figure 7. On dessine un segment $[BP]$ de longueur a et le segment $[PC]$ de longueur b. On trace la droite d perpendiculaire à BC passant par P. On dessine le milieu M de $[BC]$ et on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre M et de rayon $|BM|$. Finalement on appelle A l'intersection de d et $\mathcal{C}$ et on obtient $\sqrt{ab} = |AP|$. La justification est que ABC est rectangle en A et alors on peut appliquer le Théorème de l'Hauteur.

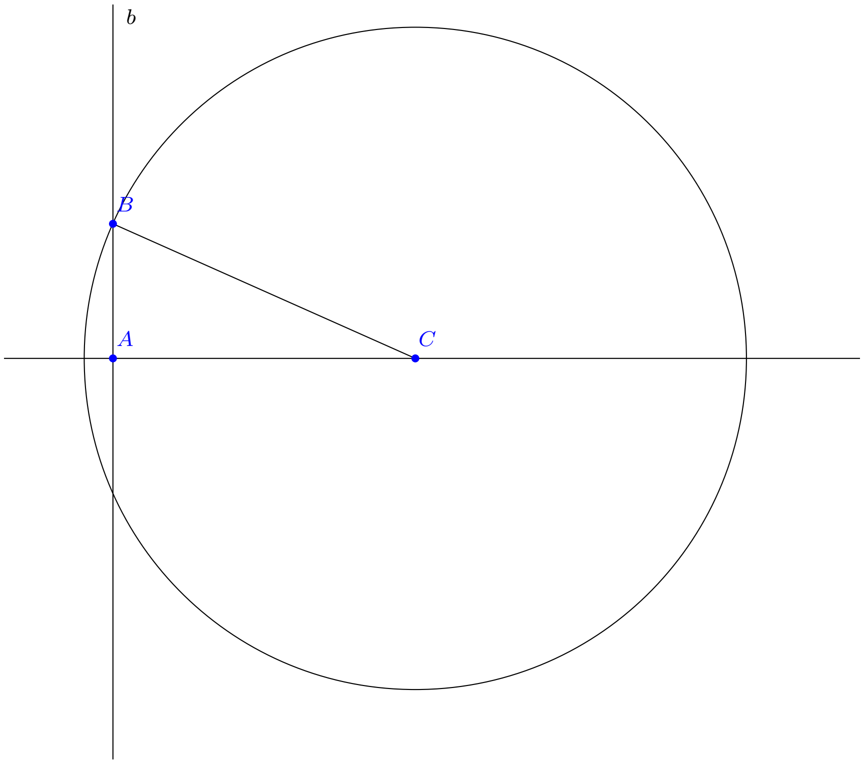

Figure 6 – Construction de $\sqrt{a^2 - b^2}$.

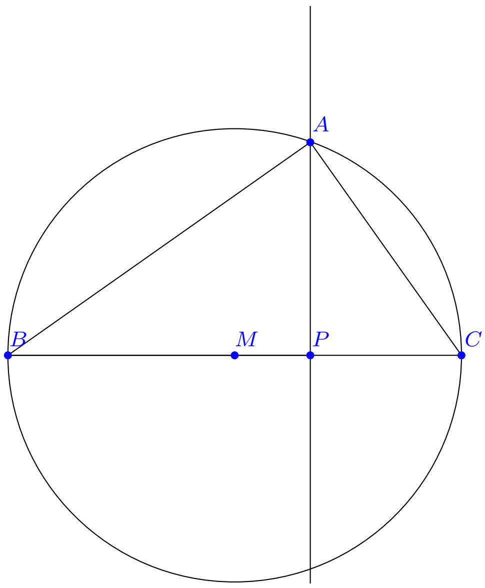

Figure 7 – Construction de $\sqrt{ab}$.

$\square$

Description algébrique des constructibles

Une figure géométrique est constructible si et seulement si on peut construir un segment de la longueur de chaque segment qui la compose. On définit alors :

$$\mathcal{G} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \begin{array}{l} \text{étant donné un segment de longueur 1} \\ \text{on peut construire à la règle et au compas} \\ \text{un segment de longueur } \alpha \end{array} \right\}.$$

Le but de cette section est de montrer que $\mathcal{G}$ est égal à un ensemble défini de manière algébrique. On dit que les nombres rationnels sont constructibles. Si a, b et c ou leur opposés sont constructibles alors on dit que les racines réelles de l'équation $ax^2 + bx + c$ sont constructibles. $\mathcal{A}$ est l'ensemble des nombres obtenus en répétant ce processus un certain nombre de fois :

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \begin{array}{l} \exists a_1 = 1, a_2, \ldots, a_n = \alpha \text{ tel que} \\ \forall k \in 1, 2, \ldots, n, \exists i, j, \ell, \\ a_k \text{ est racine de } a_i x^2 \pm a_j x \pm a_\ell. \end{array} \right\}$$

Par exemple, le nombre

$$1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{4} - \sqrt{\sqrt{5}}}$$

est constructible.

Exercice 8. Tout élément de $\mathcal{G}$ est dans $\mathcal{A}$.

Démonstration. On fixe un repère cartésien dont le centre est un point constructible et l'axe $0x$ contient un segment constructible. Il suffit de montrer que les coordonnées x et y de tout point constructibles sont dans $\mathcal{A}$. En effet, toute distance construite est égale à $z = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ avec x_1, x_2, y_1, y_2 constructibles ; or z est constructible.

Tout nouveau point est construit par une des trois manières suivantes :

1. intersection de deux droites non parallèles ;
2. intersection d'une droite et un cercle ;

3. intersection de deux cercles.

1. Soient $y = m_1 x + n_1$ et $y = m_2 x + n_2$ les équations des deux droites. Comme les deux droites ne sont pas parallèles, $m_1 \neq m_2$. On remarque que le point $P = (\frac{n_2+n_1}{m_2-m_1}, \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{m_2 - m_1})$ appartient aux deux droites, donc c'est le point d'intersection. Les coordonnées de P sont produits, sommes et quotients de nombres constructibles et alors, par l'Exercice 6, ils sont constructibles, donc P sont dans $\mathcal{A}$.

2. Soit $y = mx + n$ l'équation de la droite et $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ l'équation du cercle. Si $P = (x, y)$ est un point d'intersection, alors x et y sont solution des deux équations. Quand on remplace la valeur de y, obtenue de la première équation, dans la deuxième équation, on a

$$(x-a)^2 + (mx+n) - b)^2 = r^2.$$

De manière équivalente on a

$$(1+m^2)x^2 + (-2a + 2m(n-b))x + (a^2 + (n-b)^2 - r^2) = 0.$$

Par l'Exercice 6, tous les coefficients de l'équation sont dans $\mathcal{A}$, donc x est dans $\mathcal{A}$. Comme $y = mx + n$, il est aussi dans $\mathcal{A}$.

3. Notons $O_1 = (a_1, b_1)$ et $O_2 = (a_2, b_2)$ les centres des deux cercles. On appelle r_1 et r_2 leurs rayons. Alors les équations des cercles sont

$$\begin{aligned}(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 &= r_1^2 && (1)\\ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 &= r_2^2. && (2)\end{aligned}$$

Quand on soustrait (1) de (2), on obtient

$$(2a_2 - 2a_1)x + (2b_2 - 2b_1)y = r_1^2 - r_2^2, \tag{3}$$

qui est l'équation d'une droite (appelée la droite radicale des deux cercles). Les points d'intersection des deux cercles sont aussi l'intersection du premier cercle avec la droite radicale. Par le point 2. de l'exercice on conclue que les points d'intersection ont leurs coordonnées dans $\mathcal{A}$. □

Exercice 9. Tout élément de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{G}$.

Démonstration. Soit x la solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathcal{G}$. Alors $x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Par Exercice 4, il suffit de montrer que $\sqrt{b^2-4ac}$ est dans $\mathcal{G}$. Par Exercice 7 $\sqrt{ac}$ est dans $\mathcal{G}$ et ensuite, de nouveau par Exercice 7, $\sqrt{b^2 - \sqrt{4ac}^2}$ est dans $\mathcal{G}$.

□

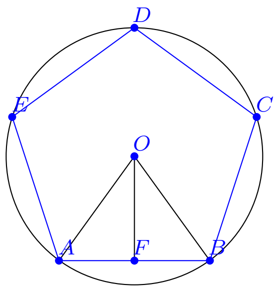

FIGURE 8 – Longueur du côté d'un polygone régulier.

Polygones de Gauss

Friedrich Gauss s'est demandé quels sont les polygones réguliers (tous les côtés égaux) constructibles à la règle et au compas.

Exercice 10. Le côté d'un polygone régulier à n sommets, inscrit dans le cercle de rayon 1 vaut $2\sin(\frac{\pi}{n})$.

Démonstration. On illustre la démonstration dans la Figure 8.

On trace les rayons du centre vers chaque sommet du polygone. Comme les angles formés s'opposent à des cordes égales, ils sont égaux, de mesure $\frac{2\pi}{n}$. Notons a la longueur des côtés du polygone et 1 le rayon du cercle circonscrit. Dans le triangle rectangle OFB, $[FB]$ s'oppose à l'angle $\angle FOB$ de mesure $\frac{\pi}{n}$, donc $|FB| = \sin(\frac{\pi}{n})$. On conclue que $a = 2\sin(\frac{\pi}{n})$. □

Pour construire un polygone régulier à n côtés il faut et il suffit de construire $\cos(\frac{\pi}{n})$. En effet, si on construit $\cos(\frac{\pi}{n})$ on construit aussi $2\sin(\frac{\pi}{n})$ et réciproquement si on construit $2\sin(\frac{\pi}{n})$ on construit aussi $\cos(\frac{\pi}{n})$. Le polygone à n côtés s'obtient en juxtaposant des triangles, dont on connaît tous les côtés.

Exercice 11. Montrer que $\cos(\frac{\pi}{5})$ est constructible.

Démonstration. On utilise deux formules :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Pour tout angle x on obtient

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1,$$

et ensuite

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Quand $x = \frac{\pi}{5}$, on a $3x = \pi - 2x$ donc

$$\cos 3x = -\cos 2x,$$

ou de manière équivalente

$$4\cos(\frac{\pi}{5})^3 + 2\cos(\frac{\pi}{5})^2 - 3\cos(\frac{\pi}{5}) - 1 = 0.$$

Cette équation se factorise en

$$(\cos(\frac{\pi}{5}) + 1)(4\cos(\frac{\pi}{5})^2 - 2\cos(\frac{\pi}{5}) - 1) = 0.$$

Donc $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, ce qui montre qu'il appartient à $\mathcal{A}$. Par l'Exercice 9, $\cos(\frac{\pi}{5})$ est constructible à la règle et au compas. $\square$

Exercice 12 (polygone de Gauss). Montrer que $\cos(\frac{\pi}{17})$ est constructible (et alors le heptadécagone aussi).

Démonstration. On procède comme dans le cas du pentagone. En effet, pour $\alpha = \frac{\pi}{17}$ on a

$$\cos(9\alpha) = -\cos(8\alpha).$$

Cela revient au fait que $16\cos(2\alpha)$ satisfait l'équation

$$x^8+8x^7-448x^6-3072x^5+61440x^4+327680x^3-2621440x^2-8388608x+16777216$$

donc

$$16\cos(2\alpha) = -1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

Comme $\cos(\frac{\pi}{17}) = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha+1}{2}}$, il est constructible. $\square$

La question de trouver les valeurs de n pour lesquelles les polygones à n côtés sont constructibles demande de trouver d'abord les nombres premiers de la forme $2^{2^k}+1$. Actuellement, on ne sait pas si ces nombres, dits premiers de Fermat, sont en nombre infini ou pas.

Discussion culturelle

Au Ve siècle av. J.-C. les Grecs ont posé trois questions :

— la quadrature du cercle : étant donné un cercle, construisez à la règle et au compas un carré dont le périmètre et le même que celui du cercle ;

— la duplication du cube : étant donné un cube, construire à la règle et au compas un cube de volume deux fois plus grand ;

— la trisection du cercle : étant donné un angle, le partager en trois angles égaux à l'aide d'une règle et d'un compas.

Au fil du temps, les trois problèmes ont été étudiés par de nombreux mathématiciens. Au XVIIe siècle René Descartes a introduit le système cartésien de coordonnées, ce qui est à la base des preuves que nous avons donné plus haut. En 1837 Pierre-Laurent Wantzel a prouvé l'égalité de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{A}$.

La duplication du cube revient à montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'appartient pas à $\mathcal{A}$, ce qui est une conséquence de la théorie d'Évariste Galois, créée vers 1830. La trisection du cercle est impossible car sinon on pourrait construire des polygones réguliers à 9 côtés, mais $\cos\frac{\pi}{9}$ n'est pas dans $\mathcal{A}$ d'après la théorie de Galois. La quadrature du cercle revient à montrer que π n'appartient pas à $\mathcal{A}$. En 1882 Ferdinand von Lindemann a prouvé que π ne vérifie aucune équation avec coefficients dans $\mathbb{Q}$, donc la quadrature du cercle est impossible. Dans l'édition de 1906 du Petit Larousse on lit la définition suivante pour la quadrature du cercle :

« poursuivre une entreprise foncièrement chimérique ».

Compléments de géométre

Théorème 1. Le lieu géométrique des points qui regardent un segment $[AB]$ sous un angle droit est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

Démonstration. On illustre la démonstration dans la Figure 9.

Soit X un point quelconque sur le cercle de diamètre $[AB]$. On note α la musure de l'angle OBX et β la mesure de l'angle OAX. Comme le triangle XOB est isoscèle, la mesure de l'angle OXB vaut α. Comme le triangle XOA est isoscèle, la mesure de l'angle OXA vaut β. Dans le triangle AXB

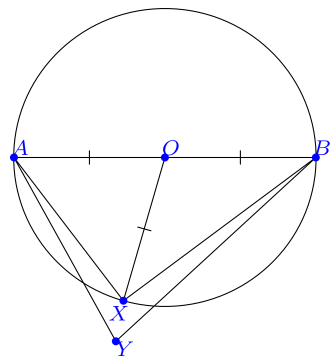

FIGURE 9 – Points qui regardent un segment sous angle droit.

la somme des angles vaut 180°, donc

$$2\alpha + 2\beta = 180°.$$

Comme la mesure de l'angle AXB vaut $\alpha + \beta$, celui-ci est droit.

Soit maintenant un point Y à l'extérieur du cercle. À l'intérieur de l'angle AYB on a un angle AXB avec x sur le cercle de diamètre $[AB]$. Donc les points extérieurs regardent le segment sous un angle aigüe. Par le même argument les points intérieurs regardent le segment sous un angle obtuz.

$\square$

Théorème 2 (de l'hauteur). Soit CAB un triangle rectangle en A. On appelle A' le pied de l'heuteur de A. Alors $AA'^2 = CA' \cdot BA'$.

Démonstration. On illustre la démonstration dans la Figure 10.

On note α la mesure de l'angle CBA. Dans le triangle CAB la somme des angles vaut 180° donc la mesure de l'angle ACB vaut $90° - \alpha$. La somme des angles dan le triangle CAA' vaut $180*$, donc la mesure de l'angle CAA' vaut $90° - (90° - \alpha) = \alpha$.

Comme les triangles $CA'A$ et $AA'B$ sont rectanges et les angles CAA' et $A'BA$ sont égaux, les deux triangles sont semblables. Alors on a

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CA'}{AA'} = \frac{AA'}{BA'}.$$

On conclue que $AA'^2 = CA' \cdot BA'$.

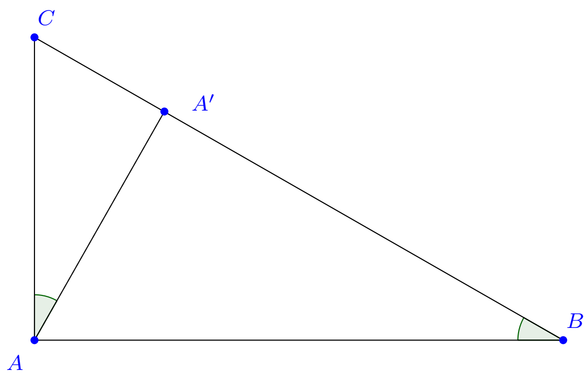

FIGURE 10 – Théorème de l'hauteur.

□

Théorème 3 (de la puissance du point par rapport au cercle). Soit $\mathcal{C}$ un cercle et P un point qui n'est pas sur le cercle. Soient A_1, B_1, A_2, B_2 quatre points sur le cercle tels que $P \in [A_1B_1]$ et $P \in [A_2B_2]$ si P est à l'intérieur de $\rfloor$ respectivement $A_1 \in [PB_1]$ et $A_2 \in PB_2$ si P est à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Alors on a

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2.$$

La constante $PA_1 \cdot PB_1$ est dite « puissance de P par rapport à $\mathcal{C}$ ».

Démonstration. On illustre la démonstration par la Figure 11.

Comme les points A_1, A_2, B_1, B_2 sont cocycliques, $\widehat{A_1A_2P} \equiv \widehat{PB_1B_2}$. Comme les triangles PA_2A_1 et PB_1B_2 partange un angle et ont un deuxième angle égal, ils sot semblables. Alors on a

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{PA_2}{PB_1} = \frac{PA_1}{PB_2}.$$

On conclue que $PA_2 \cdot PB_2 = PA_1 \cdot PB_1$.

Le cas où P est extérieur au cercle se traite de manière analogue.

□

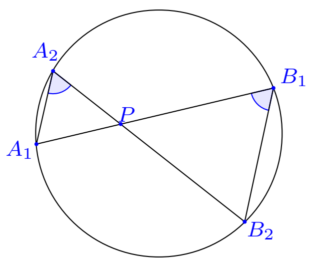

FIGURE 11 – Puissance du point par rapport au cercle.