Arithmétique II : congruences
Parimaths, groupe débutant

Guillaume Conchon–Kerjan

Cours

Il y a un bon poly d'arithmétique pour débutants sur le site d'Animath, les congruences sont au chapitre 3. On le trouve à l'adresse http ://www.animath.fr/IMG/pdf/arith-base.pdf .

Exos

Exercice 1 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe k entiers consécutifs composés.

Exercice 2 Pour quels entiers n la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est-elle irréductible ? Et la fraction $\frac{2n^2+11n-18}{n+7}$?

Exercice 3 Montrer que 20162016 . . . 2016 (on écrit 2016 fois "2016") est divisible par 81.

Exercice 4 Une pyramide comporte 400 portes. Daro l'explorateur se demande où est le trésor. Le brahmane sacré lui a dit : "lorsque toutes les portes sont fermées, actionne toutes les portes, puis toutes les portes paires, puis toutes les portes multiples de 3, etc. Tu rentreras par la 17-ème porte ouverte". Laquelle est-ce ?

Exercice 5 Montrer que 7 divise $3x + 2y$ si et seulement si 7 divise $4x + 5y$.

Exercice 6 Quel est le chiffre des unités de 7^{2015} ?

Exercice 7 Quels sont les entiers n tels que $2^n + 3$ soit un carré parfait ? Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 8 Trouver tous les entiers relatifs x, y tels que $2x^3 + xy - 7 = 0$.

Exercice 9 Trouver les entiers m, a, k, positifs avec $k \geqslant 2$, tels que $m(m + 1) = a^k$.

Exercice 10 Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 11 Montrer qu'un entier est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

Exercice 12 Calculer la somme de la somme de la somme des chiffres de $A = 4444^{4444}$.

Corrigé succinct

Solution de l'exercice 1 Regarder les entiers entre $n!+2$ et $n!+n$ pour $n>k$. On rappelle que $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$.

Solution de l'exercice 2 Soit d le pgcd de $21n+4$ et $14n+3$. La fraction est irréductible si et seulement si $d=1$. On essaie d'éliminer les n en utilisant le fait que d divise toute combinaison linéaire des deux nombres : d divise par exemple $2(21n+4)-3(14n+3) = -1$ donc $d=1$ et la fraction n'est jamais irréductible.
Pour la deuxième question, si d' est le pgcd de $2n^2+11n-18$ et $n+7$, alors d divise $2n^2+11n-18-2n(n+7) = -3n-18$. d divise donc $3n+18$ et $n+7$, donc il divise $3n+18-3(n+7) = -3$ donc $d=1$ ou $d=3$. Or 3 divise $n+7$ seulement si n est de la forme $3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$. On vérifie dans ce cas que 3 divise $2n^2+11n-18$, donc $d=3$. Conclusion : la fraction est irréductible si et seulement si n ne peut pas s'écrire $3k+2$.

http ://www.tf1.fr/tf1/direct *Solution de l'exercice 3* 2016 est divisible par 9. Si on divise notre nombre par 9, on obtient $224224\cdots224$, dont la somme des chiffres vaut 2016×224. Elle est donc divisible par 9 et on peut rediviser par 9.

Solution de l'exercice 4 Si n est le numéro d'une porte, alors cette porte est actionnée (c'est-à-dire changée d'état) autant de fois que n a de diviseurs. Si on décompose n en facteurs premiers : $n = p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times\cdots\times p_k^{a_k}$, alors n possède $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$ diviseurs. La porte est finalement ouverte lorsqu'elle a été actionnée un nombre impair de fois. Ce nombre de diviseurs est impair si et seulement si tous les a_i sont pairs. Or si tous les a_i sont pairs, n est un carré parfait (le carré de $p_1^{a_1/2}\times\cdots\times p_k^{a_k/2}$. Réciproquement, si $n = n'\times n'$, chaque facteur premier de n' est deux fois présent dans n donc tous les a_i sont pairs. La porte cherchée correspond donc au 17-ème carré parfait. Or $17^2 = 289$ donc la bonne porte est la 289-ème.

Solution de l'exercice 5 $(3x+2y)+(4x+5y) = 7(x+y)$ donc dans le membre de gauche, un terme est divisible par 7 si et seulement si l'autre l'est.

Solution de l'exercice 6 On remarque que $7^4 \equiv 1 \pmod 10$ donc $7^{2015}\equiv 7^{4\times 503+3}\equiv 1^{503}\times 7^3\equiv 343\equiv 3 \pmod 10$.

Solution de l'exercice 7 Si $n>1$, $2^n+3\equiv 3 \pmod 4$ donc ne peut pas être un carré parfait. On vérifie que la seule possibilité est $n=0$.
Si $2^n+1 = k^2$, $2^n = (k-1)(k+1)$ donc $k-1$ et $k+1$ sont deux puissances de 2 dont la différence vaut 2. La seule possibilité est $k-1=2$ donc $n=3$.

Solution de l'exercice 8 x divise 7 donc $x=-7,-1,1$ ou 7. On teste les 4 valeurs et on trouve $x=, y=$ comme solution.

Solution de l'exercice 9 m et $m+1$ sont premiers entre eux donc sont des puissances k-èmes : $m=b^k$ et $m+1=c^k$ avec $b<c$ et $bc=a$ (ça peut se voir en décomposant $m(m+1)$ en facteurs premiers). Or $c^k\geqslant (b+1)^k\geqslant b^k+kb+1>b^k$ si $b>0$. Donc $b=0, c=1, a=m=0$. k peut être quelconque.

Solution de l'exercice 10 S'il n'y en a qu'un nombre fini, soit P leur produit, qui est congru à 1 ou 3 modulo 4. Quitte à le multiplier par 3, on peut supposer qu'il est congru à 1 modulo 4. $P+2$ est premier avec tous ces nombres premiers, et il est premier avec 2, donc sa décomposition en facteur premiers ne comporte que des nombres congrus à 1 modulo 4. En faisant leur produit, on voit que $P+2\equiv 1 \pmod 4$ donc $P\equiv 3 \pmod 4$, contradiction.

Solution de l'exercice 11 On écrit $n = \overline{a_k \cdots a_1 a_0}$ le nombre dont les chiffres sont $a_k, \cdots, a_1, a_0$ dans cet ordre (en base dix). On a $n = 10^k a_k + \cdots + 10a_1 + a_0$. Or pour tout i, $10^i \equiv 1^i \equiv 1 \pmod 9$, donc :
$n \equiv a_k + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 9$. Ceci généralise le critère usuel de divisibilité par 9 (qui dit que $n \equiv 0 \pmod 9$ si et seulement si c'est le cas de la somme de ses chiffres).

Solution de l'exercice 12 Notons $S(n)$ la somme des chiffres d'un entier n. D'après l'exo précédent, $S(S(S(A))) \equiv A\,[9]$. Calculons donc A modulo 9. On a $4444 \equiv 4+4+4+4 \equiv -2\,[9]$, il faut donc calculer $(-2)^{4444}$ modulo 9. On remarque que $(-2)^3 \equiv 1\,[9]$. On en déduit que $(-2)^{3k+i} \equiv ((-2)^3)^k \cdot (-2)^i \equiv (-2)^i\,[9]$. En particulier, comme $4444 \equiv 4+4+4+4 \equiv 1\,[3]$, $(-2)^{4444} \equiv (-2) \equiv 7\,[9]$.
Ainsi, on connaît $S(S(S(A)))$ modulo 9. Pour trouver sa vraie valeur, l'idée à avoir est que $S(n)$ est en général beaucoup plus petit que n. Ainsi, $S(S(S(A)))$ est beaucoup beaucoup beaucoup plus petit que A, et avec un peu de chance il sera suffisamment petit pour pouvoir le déterminer. On écrit donc que $A \leqslant (10^4)^{5000} = 10^{20000}$, donc A a au plus 20000 chiffres, donc $S(A) \leqslant 20000 \times 9 \leqslant 200000$. Donc $S(S(A)) \leqslant 1 + 9 \cdot 5 = 46$, puis $S(S(S(A))) \leqslant 3 + 9 = 12$. Or il vaut 7 modulo 9, c'est donc nécessairement 7.