GÉNÉRALITÉS SUR LES POLYNÔMES

SALIM TAYOU

Exercice 1. *Soit P un polynôme à coefficients entiers positifs. Déterminer le nombre minimal d'évaluations nécessaires pour déterminer le degré et les coefficients de P.*

Exercice 2. *Déterminer la division euclidienne de $X^5+2X^4-6X^3+8X-1$ par X^2+2X+1.*
Trouver le reste de la division euclidienne de $X^{100}-2x^{51}+1$ par x^2-1.

Exercice 3. *Trouver tous les polynômes à coefficients réels tels que $16P(x^2)=P(2x)^2$ pour tout réel x.*

Exercice 4. *Soit $n\geq 1$ un entier. Montrer que $(X+1)^2$ divise $X^{4n+2}+2X^{2n+1}+1$.*

Exercice 5. *Soit P un polynôme à coefficients réels qui possède n racines distinctes. Monter pour tout x dans $\mathbb{R}$:*

$$P(x)''P(x)\leq P'(x)^2$$

Exercice 6. *Trouver tous les polynômes à coefficients réels tels que l'image de tout rationnel est rationnelle.*

Exercice 7. *Déterminer tous les triplets de réels (x,y,z) tels que $x+y+z=17$, $xy+xz+yz=94$, $xyz=168$.*

Exercice 8. *Soient a, b, c des entiers deux à deux distincts. Monter qu'il n'existe pas de polynôme à coefficients entiers P tels que $P(a)=b$, $P(b)=c$ et $P(c)=a$.*

Exercice 9. *Soit p un nombre premier. Montrer que le polynôme $x^{p-1}+\cdots+1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.*

Exercice 10. *Soient $a_1,\cdots,a_n$, n entiers deux à deux distincts. Soit $P=\prod_{i=1}^n(X-a_i)-1$. Monter que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.*

Exercice 11. *Monter que l'ensemble des réels x vérifiant $\sum_{k=1}^{70}(\frac{k}{x-k})\geq\frac{5}{4}$ est réunion d'intervalles de longueur* 1988.

Exercice 12. *Soient P, Q deux polynômes réels non constants ayant les mêmes racines, tels que $P-1$ et $Q-1$ ont les mêmes racines. Montrer que $P=Q$.*

Date: 16 janvier 2016.

Exercice 13 (Difficile)**.** *Trouver tous les polynômes* P *tels que pour tous réels* a*,* b*,* c *vérifiant* $ab + bc + ca = 0$ *on a*

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c).$$