

PARIMATHS

Combinatoire – Groupe débutant

Samedi 7 novembre 2015

1 Échauffement

Exercice 1. Si un musée a 2 entrées et 3 sorties, de combien de manières différentes peut-on entrer et sortir de ce musée ?

Exercice 2. Dans ma garde-robe, j'ai 5 paires de chaussures, et 3 paires de chaussettes. De combien de manières différentes puis-je me chauffer ?

Exercice 3. J'ai 3 livres de mathématiques (différents), 4 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de manières différentes puis-je choisir un livre ? Deux livres ? Deux livres de matières différentes ?

Exercice 4. Combien y a-t-il d'entiers positifs inférieurs à 1000 dont tous les chiffres sont impairs ?

Exercice 5. Je souhaite maintenant ranger sur une étagère mes 3 livres de mathématiques, 4 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons puis-je effectuer ce rangement :

- (1) si les livres doivent être groupés par matières ;
- (2) si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 6. Quelle est la probabilité pour que deux dames placées au hasard sur un échiquier soient une menace directe l'une pour l'autre ?

Exercice 7. Si $n \geq 1$ est un entier, on pose $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$. On définit aussi $0! = 1$. Calculer $3!$. Calculer $\frac{2015!}{2016!}$.

Exercice 8. Si $0 \leq m \leq n$, on pose

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

(i) Calculer $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{3}$ et $\frac{\binom{7}{3}}{\binom{7}{2}}$.

(ii) Calculer

$$\frac{\binom{n+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

2 Coefficients binomiaux

Exercice 9. De combien de manières peut-on placer 5 pièces identiques dans 3 poches différentes ?

Exercice 10. On considère un grand rectangle de taille m sur n , découpé en petits carrés de côté 1. Combien y a-t-il de manières d'aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit en se déplaçant uniquement sur le quadrillage, et seulement vers le haut ou la droite ?

Exercice 11. Soient $1 \leq m \leq n$ deux entiers. Combien peut-on trouver de m -uplets (x_1, \dots, x_m) d'entiers strictement positifs tels que

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n?$$

Exercice 12. Soit E un ensemble à n éléments avec $n \geq 1$. Montrer que le nombre de sous-ensembles de E qui ont un nombre pair d'éléments est le même que le nombre de sous-ensembles de E qui ont un nombre impair d'éléments.

3 Double comptage

Exercice 13. Soit $n \geq 1$ un entier. En calculant de deux manières le nombre de manières de choisir n personnes dans un groupe constitué de n filles et de n garçons, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 14. Soit $n \geq 1$ un entier. Par un double comptage, calculer la somme :

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}$$

Exercice 15. Soit n et k entiers tels que $1 \leq k \leq n$. En calculant de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles de $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ à $k+1$ éléments, montrer que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k}{k}.$$

Exercice 16. Soit $n \geq 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2 = n(n+1)2^{n-2}.$$