# Nombres complexes

Clément LEZANE

April 7, 2016

# 1 Construction de $\mathbb{C}$

## 1.1 Introduction: le nombre complexe i

L'équation $X^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car tous les carrés des réels sont positifs.($X^2 + 1$ est strictement positif)

**Définition 1** *Le nombre i est une solution de l'équation $X^2 + 1 = 0$.*

**Remarque 1** *$i \notin \mathbb{R}$ On peut représenter $\mathbb{R}$ par une droite et i est représenté par un point qui n'est pas sur la droite.*

## 1.2 Définition et propriétés de $\mathbb{R}$[i]

**Définition 2** $\mathbb{R}[i] = (a + bi, (a, b) \in \mathbb{R}^2)$

**Propriété 1** *(Stabilité) Si $(x, y) \in \mathbb{R}[i]^2$, alors $x + y \in \mathbb{R}[i]$ et $x * y \in \mathbb{R}[i]$.*

Cela est facile à voir: $\begin{cases} a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi)(c + di) = ac + bdi + bic + bd(i^2) = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{cases}$

**Propriété 2** *(Inversibilité) Si $x \in \mathbb{R}[i]$ et x non nul, alors $\exists y \in \mathbb{R}[i]$ tel que $x * y = 1$*

En effet, si a et b non nul, on a alors $a^2 + b^2 > 0$ et donc $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$

**Remarque 2** *On admet que $\mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$*

# 2 Outils dans $\mathbb{C}$

## 2.1 Conjugués

**Définition 3** *Soit $x = a+bi \in \mathbb{R}[i]$ , on défini le conjugué de x ,noté $\overline{x}$, comme : $\overline{x} = a - bi$*

**Remarque 3** *Soit $x \in \mathbb{R}[i]$, $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{x} = x$*

**Propriété 3** *Si $x \in \mathbb{R}[i]$ alors $x * \overline{x} \in \mathbb{R}$*

On a facilement $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

**Propriété 4** *Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on a $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ et $\overline{x * y} = \overline{x} * \overline{y}$*

En fait, on peut développer : $\begin{cases} \overline{a + bi + c + di} = a + c - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) \\ \overline{(a + bi)(c + di)} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) \end{cases}$

## 2.2 Partie réelle et partie imaginaire

**Définition 4** *On considère deux fonctions Re et Im de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{R}$ *tel que: pour tout* $x = a + bi \in \mathbb{C}$*, on a* $Re(x) = a$ *et* $Im(x) = b$

**Remarque 4** *On peut remarquer que* $Re(x) = \frac{x+\overline{x}}{2}$ *et* $Im(x) = \frac{x-\overline{x}}{2i}$*. Et sur un plan complexe, soit x le complexe représenté par un point M,* $Re(x)$ *est alors l'abscisse et* $Im(x)$ *l'ordonné.*

Il suffit d'utiliser la définition de $\overline{x} = a - bi$

**Propriété 5** *Soit* $(x, y) \in \mathbb{C}^2$*, on a* $Re(x+y) = Re(x)+Re(y)$ *et* $Im(x+y) = Im(x) + Im(y)$

Il faut reprendre la définition de Re et Im.

## 2.3 Module et Arguments

**Définition 5** *Soit* $x \in \mathbb{C}$ *alors le module de x ,noté* $|x|$*, est défini comme :* $|x| = \sqrt{x * \overline{x}}$

**Remarque 5** *Pour tout* $x \in \mathbb{C}$*, on a:*

- $|x| = |\overline{x}|$
- $|Re(x)| \leq |x|$
- $|Im(x)| \leq |x|$

Il suffit de remarquer que $|a + bi| = a^2 + b^2$

**Définition 6** *Soit* $x \in \mathbb{C}$ *alors un argument de x ,noté* $arg(x)$*, est défini comme :* $arg(x) = arctan(\frac{x-\overline{x}}{x+\overline{x}})$

**Remarque 6** *Si on retourne sur la représentation du plan complexe: soit x un nombre complexe représenté par un point M son module est la longueur OM et l'argument est l'angle compris entre l'axe des réels et [OM).*

**Propriété 6** *(Inégalité triangulaire) Soit* $(x, y) \in \mathbb{C}^2$*, on a* $|x + y| \leq |x| + |y|$

$|x + y|^2 = (x + y)\overline{(x + y)} = (x + y)(\overline{x} + \overline{y} = |x|^2 + |y|^2 + 2Re(x\overline{y}) \leq (|x| + |y| + 2|x||\overline{y}|) = (|x| + |y|)^2$

**Remarque 7** *Soit x un nombre complexe, alors pour tout* $\lambda$ *réel positif,* $arg(\lambda * x) = arg(x)$

## 2.4 Forme polaire

**Définition 7** *On appelle la forme polaire de* $x \in \mathbb{C}$*:* $|x| * exp(i * arg(x))$

En effet on admet que $exp(i\theta) = cos(\theta) + isin(\theta)$ Il suffit après de vérifier que la forme polaire de x a le même module et le même argument que x.

# 3 Applications

## 3.1 Formules d'Euler

Soit $\theta$ un réel quelconque, on a:

- $cos(\theta) = \frac{exp(i\theta)+exp(-i\theta)}{2}$
- $cos(\theta) = \frac{exp(i\theta)-exp(-i\theta)}{2i}$

Cette formule se retrouve facile par la définition de $exp(i\theta)$

## 3.2 Cercle d'unité

Soit n un entier naturel non nul, l'ensemble des solutions de $X^n = 1$ est $(exp(\frac{2ki\pi}{n})$, avec k de 0 à n-1)

## 3.3 Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n$ de degré n tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$