Méli-mélo de preuves graphiques
Parimaths - Niveau débutant

Diego Izquierdo

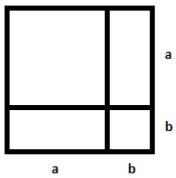
1er février 2014

Tous les exercices de cette séance doivent être résolus en faisant des dessins, en coloriant, en complétant des figures, en traçant des graphiques (même s'il y a un certain nombre d'entre eux que vous savez peut-être résoudre autrement)...

1 Identités algébriques

Commençons par un exemple très simple.

Exemple : Expliquer pourquoi le dessin suivant montre l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour a, b positifs.



Exercice 1 : Montrer l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ pour $a > b > 0$.

Exercice 2 : Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ pour a et b positifs. Montrer, pour a, b, c positifs, que $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$, puis en déduire l'inégalité $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Exercice 3 : Montrer l'inégalité arithmético-quadratique $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Exercice 4 : Calculer $T_n = 1+2+3+...+n$ en fonction de n. Montrer que $T_nT_k + T_{n-1}T_{k-1} = T_{nk}$. Montrer qu'un nombre dont tous les chiffres sont égaux à 1 en base 9 est de la forme T_n pour un certain n.

Exercice 5 : Montrer que, pour tout entier naturel n, la somme des n premiers entiers impairs est un carré parfait. Calculer $\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+...+(4n-1)}$.

Exercice 6 : Calculer $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ en fonction de n. Pourriez-vous calculer $S_1 + S_2 + ... + S_n$? Et $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$?

Exercice 7 : Soit F_n le n-ième nombre de Fibonacci. Montrer que $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_nF_{n+1}$ et que $F_{n+1}^2 = 4F_n^2 - 4F_{n-1}F_{n-2} - 3F_{n-2}^2$.

Exercice 8 : Soient $0 < r < 1$ et n un entier naturel. Calculer $1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n$ et $1 + r + r^2 + r^3 + ...$

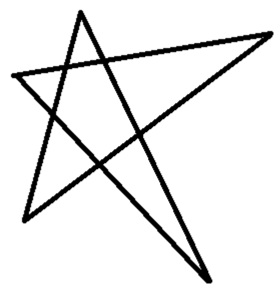
Exercice 9 : Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts. On note $S(p, q) = \left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + ... + \left[\frac{(\frac{q-1}{2})p}{q}\right]$. Calculer $S(p, q) + S(q, p)$ en fonction de p et q.

Exercice 10 : Quel est le minimun de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 8x + 17}$?

Exercice 11 :
(a) Soit ABC un triangle et notons $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Montrer que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$.
(b) Soient a, b, c trois réels positifs. Montrer que $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.

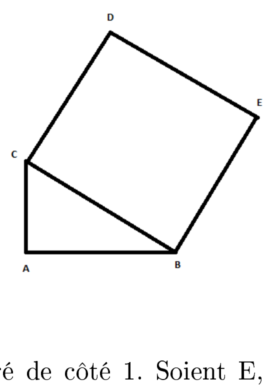
2 Géométrie

Exercice 1 : Montrer que la somme des angles aux sommets de l'étoile dessinée ci-dessous vaut 180°.

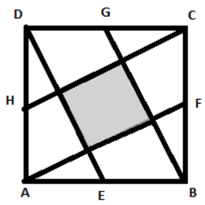


Exercice 2 : Soient ABC un triangle équilatéral et D un point à l'intérieur de ABC. Montrer que la somme des distances de D aux côtés de ABC est égale à la longueur de la hauteur de ABC.

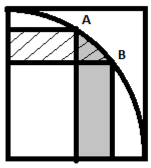
Exercice 3 : Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle en A et BCDE est un carré. Montrer que la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ divise le carré BCDE en deux parties de même aire.



Exercice 4 : Soit ABCD un carré de côté 1. Soient E, F, G, H les milieux des côtés de ABCD. Quelle est l'aire grisée ?



Exercice 5 : Montrer que la somme des aires grisée et hachurée ci-dessous ne dépend que de la longueur de l'arc de cercle AB.

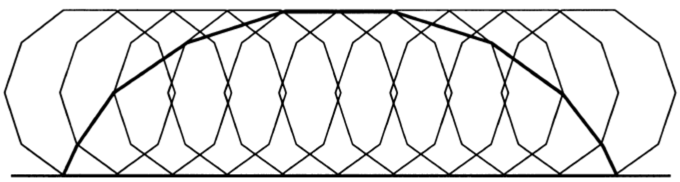


Exercice 6 : Quelle est l'aire d'un octogone convexe inscrit dans un cercle possédant 4 côtés consécutifs de longueur 2 et 4 côtés consécutifs de longueur 3 ?

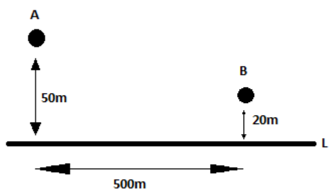
Exercice 7 : Soit ABC un triangle. Soient D, E, F, G, H, I les points tels que ABDE, BCFG et ACIH sont des carrés extérieurs au triangle. Montrer que les triangles DBG, FCH et EAI ont même aire.

Exercice 8 : Soit ABC un triangle d'aire 1. Montrer qu'il existe un triangle dont les longueurs des côtés sont les longueurs des médianes de ABC. Quelle est son aire ?

Exercice 9 : On fait rouler un décagone régulier sur une droite comme indiqué ci-dessous, et on suit la trajectoire d'un sommet, ce qui permet d'obtenir la ligne polygonale épaisse que l'on voit sur le dessin. Montrer que l'aire en-dessous de la ligne polygonale est égale à 3 fois l'aire du décagone. Que dire si l'on remplace le décagone par un polygone régulier quelconque ?



Exercice 10 : En allant de chez moi au lycée, je voudrais passer me rafraîchir à la rivière. Le dessin ci-dessous représente ma maison (point A), mon lycée (point B) et la rivière (droite L). Quelle est la longueur du chemin le plus court que je peux emprunter ?



Exercice 11 : Une boule se trouve au centre d'une table de billard de longueur 8 mètres et de largeur 2 mètres. On la lance sans effet et après avoir parcouru 29 mètres, elle atteint un sommet de la table. Combien de fois a-t'elle rebondi sur les bords de la table ?

Exercice 12 : Soient O(0,0), A(1,0) et B(0,1). Sur l'arc de cercle de centre O, d'extrémités A et B et contenu dans le premier quadrant, on place deux points P et Q de sorte que (PQ) et (AB) soient parallèles. On note X l'intersection de (PQ) et (OA). Calculer $PX^2 + QX^2$.

Exercice 13 : Quelles sont les aires possibles d'un hexagone convexe dont tous les angles sont égaux et dont les côtés mesurent 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ?

Exercice 14 : J'ai dessiné 2014 points verts dans le plan de telle sorte que tout triangle à sommets verts est d'aire au plus 1. Montrer que les 2014 points sont contenus dans un triangle d'aire 4.

Exercice 15 : Soit ABCD un carré. Soient P et Q des points de [BC] et [CD] respectivement tels que BP=CQ. Soient X et Y deux points distincts de AP et AQ respectivement. Montrer que les longueurs BX, XY et YD sont les côtés d'un triangle.

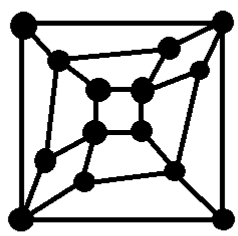
3 Preuves par coloriage

Exercice 1 : On considère un quadrillage de taille 2014×2014 et on supprime deux coins opposés. Est-il possible recouvrir le quadrillage avec des pièces de domino ?

Exercice 2 : Un quadrillage rectangulaire est recouvert à l'aide de pièces de taille 2×2 et 4×1. Une des pièces s'est cassée et on ne dispose que d'une pièce de l'autre type. Est-il toujours possible de recouvrir le quadrillage (en réarrangeant les pièces) ?

Exercice 3 : Est-il possible de ranger 250 briques de taille $1 \times 1 \times 4$ dans une boîte de taille $10 \times 10 \times 10$?

Exercice 4 : Voici la carte des grandes villes et des grandes routes d'un pays :



Existe-t'il un chemin passant exactement une fois par chaque ville ?

Exercice 5 : On considère un quadrillage de taille 5×5. On place le nombre -1 dans l'une des cases. On place des 1 dans toutes les autres cases. L'opération consistant à changer le signe de tous les nombres contenus dans un carré de côté strictement plus grand que 1 est permise. Selon la case où est situé le -1 initial, déterminer s'il est possible d'arriver à la situation où il n'y a que des 1.

Exercice 6 : On colorie le plan à l'aide de 3 couleurs. Montrer qu'il existe deux points distants de 1 de même couleur.

Exercice 7 : On considère les points $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$ et $D(1,1)$. En partant des points A, B et C et en effectuant des symétries par rapport à A, B, C ou des points déjà construits, est-il possible d'atteindre D ?

Exercice 8 : Est-il possible de déplacer un cavalier sur un échiquier de taille $4 \times n$ de sorte qu'il passe par chaque case exactement 1 fois et qu'il revienne à la case de départ ?

Exercice 9 : On colorie une sphère avec deux couleurs. Montrer qu'il existe un triangle équilatéral dont les trois sommets sont de la même couleur.

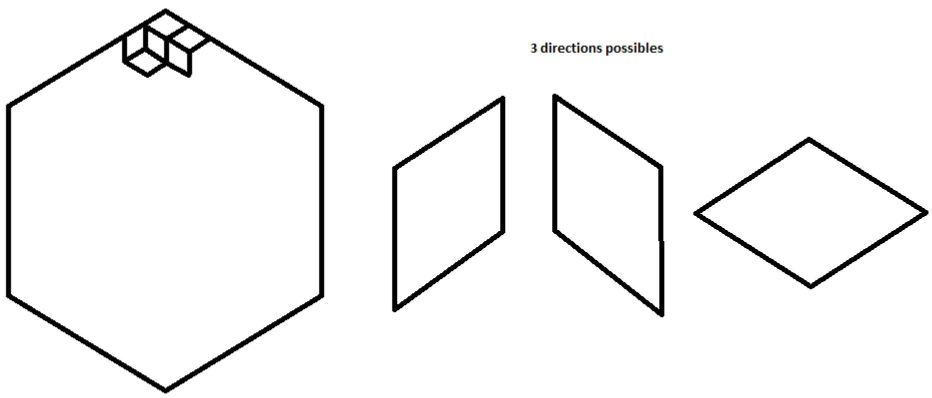
4 Autres

Exercice 1 : Sur un circuit circulaire de Formule 1, il y a n postes à essence. Chacun contient une certaine quantité d'essence, et la quantité d'essence totale répartie dans les postes à essence est exactement égale à la quantité d'essence nécessaire pour faire le tour du circuit. En choisissant le point de départ de manière idoine, est-il toujours possible de faire le tour du circuit ?

Exercice 2 : On considère un quadrillage de taille $2^n \times 2^n$. On supprime une case quelconque du quadrillage. Montrer que le quadrillage restant peut être recouvert par des pièces constituées de 3 cases non alignées.

Exercice 3 : Sur une table ronde de rayon 1 mètre, deux joueurs placent alternativement des pièces de 1 euro (0,5 cm de rayon) sans qu'elles ne se superposent sur les pièces déjà placées. Le dernier à pouvoir jouer gagne. Quel joueur gagne ?

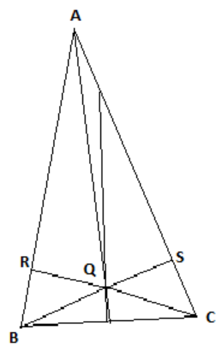
Exercice 4 : On dispose d'une boîte hexagonale (régulière) de côté n (entier naturel). On veut remplir la boîte de calissons. Chaque calisson a la forme d'un losange de côté 1 et dont les angles mesurent 60^o et 120^o. On remarque alors qu'un calisson peut avoir 3 directions différentes (voir dessin). Montrer que le nombre de calissons ayant une orientation donnée est égal au tiers du nombre de calissons total.



5 Conclusion

Réfléchissez à la valeur des solutions des exercices précédents : sont-elles rigoureuses ? Sont-elles suffisamment précises ? Sont-elles convaincantes ? Méritent-elles d'être appelées preuves ? Ou elles ne sont que de simples intuitions et visualisations ? Peuvent-elles être rendues rigoureuses ?
Vous pouvez appuyer votre réflexion sur l'étude de l'exemple suivant.

"Montrons" que tout triangle est isocèle. Soit ABC un triangle quelconque.



Sur la figure précédente, Q désigne l'intersection de la bissectrice issue de A et de la médiatrice de [BC], et R et S sont les projetés orthogonaux de Q sur les côtés [AB] et [AC] respectivement. Comme Q est sur la médiatrice de [BC], on a QB=QC, et donc $Q\hat{B}C = Q\hat{C}B$. De plus, comme Q est sur la bissectrice issue de A, on a QR=QS. On déduit que les triangles rectangles QRB et QSC sont isométriques, et donc que $Q\hat{B}R = Q\hat{C}S$. Par conséquent, $A\hat{B}C = Q\hat{B}R + Q\hat{B}C = Q\hat{C}S + Q\hat{C}B = A\hat{C}B$, et ABC est isocèle.

6 Références

[1] Roger Nelsen. *Proofs Without Words : Exercises in Visual Thinking.* Cambridge University Press, 1997.

[2] Roger Nelsen. *Proofs Without Words II : More Exercises in Visual Thinking.* The Mathematical Association of America, 2001.

[3] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies.* Springer-Verlag, Problem Books in Mathematics, 1998.

——————————————FIN——————————————