Invariants, coloriages

Guillaume Conchon–Kerjan

19 décembre 2015

Cours

On trouve des cours intéressants (donnés au stage de Montpellier 2013 ici) dans la partie Combinatoire sur la page de Thomas Budzinski
(http ://www.eleves.ens.fr/home/budzinsk/polys/). Par exemple,
http://www.eleves.ens.fr/home/budzinsk/polys/Combinatoire/Débutant/2013a_cours.pdf
http://www.eleves.ens.fr/home/budzinsk/polys/Combinatoire/Débutant/2013b_courstd.pdf
dont sont issus beaucoup d'exos ici présents.

Exos

Coloriages

Exercice 1 Quel est le nombre de pavages par 31 dominos d'un échiquier auquel on a retiré deux coins opposés ?

Exercice 2 Alicia dispose des 5 tétrominos (pièces constituées de quatre carrés égaux : un "carré", un "I", un "Z", un "T", un "L"). Peut-elle former un rectangle avec ?

Exercice 3 Bobby a pavé un carré $n \times n$ avec des carrés 2×2 et des barres 1×4. Peut-il jeter un carré et le remplacer par une barre, en ayant le droit de déplacer les pièces restantes ?

Exercice 4 Pour quels n peut-on paver un carré de côté n dont on a retiré les 4 cases en coin par des tétrominos de type "L" ?

Exercice 5 2014 arbres sont disposés en cercle. Au début, il y a un chevalier sur chaque arbre. Toutes les heures, deux chevaliers s'envolent de l'arbre où ils étaient respectivement pour aller se poser sur un arbre voisin. Se peut-il qu'à un moment, tous les chevaliers soient sur le même arbre ?

Invariants

Exercice 6 Au premier jour d'un congrès, n scientifiques se serrent la main. Montrer qu'à n'importe quel moment, le nombre des scientifiques ayant serré un nombre impair de mains est pair.

Exercice 7 Eve contemple pensivement une grille 8×8 de lampes, toutes allumées. Elle peut prendre une ligne ou colonne de son choix, et changer l'état de toutes les lampes (c'est-à-dire allumer les éteintes et éteindre les allumées). Elle peut recommencer cette opération autant de fois qu'elle veut. Peut-elle s'arranger pour qu'une seule lampe soit allumée ?

Exercice 8 Au tableau, on écrit les entiers de 1 à 2015. Une étape consiste à prendre deux nombres au tableau et à les remplacer par leur différence. Finalement, il ne reste qu'un nombre. Est-ce possible que ce soit 0 ? Que ce soit 1 ?

Exercice 9 Sur l'île mystérieuse vivent trois espèces de caméléons : les bleus, les jaunes et les verts. Quand un jaune croise un bleu, les deux deviennent vert et c'est bien normal. Mais plus généralement, quand deux caméléons de couleurs différentes se croisent, ils deviennent tous deux de la troisième couleur ! Hier, il y avait 17 bleus, 16 jaunes et 12 verts. Se peut-il qu'ils deviennent demain tous bleus ?

Exercice 10 Un roi se trouve dans un coin d'un damier $m \times n$. Tour à tour, Anthelme et Brunehaut le déplacent selon la règle des échecs (d'une case, on peut accéder à ses 8 voisines). Le premier qui repasse par une case déjà visitée a perdu. Qui gagne ?

Monovariants

Exercice 11 Ekaterina écrit n nombres au tableau. Toutes les minutes, elle remplace deux nombres par leur pgcd et leur ppcm. Montrer qu'à partir d'un certain moment, les nombres au tableau ne changeront plus.

Exercice 12 2015 mésanges sont réparties sur 120 tours. Chaque minute, une mésange se déplace vers une tour comprenant au moins autant de mésanges que la sienne (en la comptant elle-même dans la tour de départ). Montrer qu'à la fin, toutes les mésanges garderont la même tour.

Exercice 13 On trace n points rouges et n points bleus. Trois points ne sont jamais alignés. Montrer qu'on peut relier chaque rouge à un bleu de sorte que les segments tracés ne se croisent jamais.

Bonus

Exercice 14 Kullervo dispose de trois tas constitués de $51, 49$ et 5 biscuits. Il a le droit de fusionner deux tas, ou de couper un tas en deux tas égaux lorsque c'est possible. Peut-il se retrouver avec trois tas de $52, 48$ et 5 cailloux ?

Exercice 15 Untamala écrit les nombres de 1 à n, dans l'ordre. Puis elle se permet de permuter deux nombres, autant de fois qu'elle veut. Prouver qu'avec un nombre impair de permutations, elle ne peut pas retrouver l'ordre initial.

Corrigé succint

Solution de l'exercice 1 On a deux cases noires (par exemple) de plus que de blanches. Or un domino recouvre une case de chaque couleur. Pavage impossible.

<u>Solution de l'exercice 2</u> Le rectangle aurait 20 cases. Donc un côté pair. Donc autant de noir que de blanc si on le colorie comme le damier d'échec. Tous les tétrominos utilisent 2 blancs et 2 noirs, sauf le "T" qui en utilise 3 et 1 (ou l'inverse). Pavage impossible.

<u>Solution de l'exercice 3</u> Faire un pavage en quatre couleur (alterner une ligne noir-blanc, une ligne bleu-rouge). Un carré couvre toujours un rouge et un noir. Une barre couvre ou bien 2 noirs (et dans ce cas 2 blancs ou 2 bleus) ou bien 2 rouges (et dans ce cas 2 bleus ou 2 blancs). Il faut donc autant de barres couvrant 2 noirs que de barres couvrant 2 rouges, donc un nombre pair de barres. Si on avait un pavage initialement, il y avait donc un nombre pair de barres. Ajouter une barre en virant un carré ne permet donc aucun pavage, puisque le nombre de barres sera impair.

<u>Solution de l'exercice 4</u> Alterner les lignes blanches et noires. On trouve que nécessairement $n = 4k + 2$, et on fait une construction qui marche dans ce cas ($k \geqslant 1$).

<u>Solution de l'exercice 5</u> On colorie un arbre sur deux. Toutes les minutes, le nombre total de chevaliers sur des arbres coloriés peut augmenter ou diminuer de 2 ou rester le même. Donc sa parité ne change pas. Or, il y a 1007 chevaliers sur des arbres coloriés au départ. On ne peut donc pas finir avec 0 (si tous les chevaliers sont sur un arbre non-colorié) ou 2014 (s'ils sont tous sur un arbre colorié).

<u>Solution de l'exercice 6</u> Pour chacune des n personnes, on note le nombre de mains qu'elle a serré : $a_1, a_2 \cdots, a_n$. On note $S = a_1 + \cdots + a_n$ leur somme : elle est paire, car au début $S = 0$, et à chaque poignée, elle augmente de 2 ($+1$ pour chacune des 2 personnes impliquées dans la poignée). Or une somme paire doit comporter un nombre pair de termes impairs.

<u>Solution de l'exercice 7</u> On vérifie que chaque opération conserve la parité du nombre d'ampoules allumées : si la ligne ou la colonne compte k ampoules allumées avant d'actionner l'interrupteur, on en gagne $8 - 2k = 2(4 - k)$.

<u>Solution de l'exercice 8</u> On peut faire 0 (faites-le). Par contre, on garde toujours la même parité de nombre de nombres impairs : on en a 1008 au début, donc on ne peut pas en avoir un seul à la fin.

<u>Solution de l'exercice 9</u> Le nombre de jaunes moins le nombre de verts est invariant modulo 3. Cette différence vaut 4 au début, elle ne peut donc pas tomber à 0.

<u>Solution de l'exercice 10</u> ...

<u>Solution de l'exercice 11</u> ...

<u>Solution de l'exercice 12</u> Si on note I la somme des carrés du nombre de mésanges de chaque tour, I augmente de 2 à chaque fois. Or I est borné (car il y a au plus 2015 mésanges sur au plus 120 tours). Donc on va nécessairement être bloqué à un moment, c'est-à-dire qu'on ne trouvera plus deux tours non-vides. Donc toutes les mésanges garderont une même tour.

<u>Solution de l'exercice 13</u> Décroiser systématiquement les n : la somme des longueurs des segments décroît.

<u>Solution de l'exercice 14</u> On est obligé de faire une fusion. Chacune des trois possibilités ne laisse que des tas multiples d'un impair qui ne divise pas 52. Or en fusionnant ou coupant en 2, les tas restent divisibles par cet impair. Donc on ne peut pas faire 52.

<u>Solution de l'exercice 15</u> ...