Parimaths

Un peu de combinatoire - Groupe débutant

Samedi 30 avril 2016

Les bases On dit que $(A_1, \dots, A_n)$ est une partition de A si la réunion des A_i est égale à A et les A_i sont toujours deux à deux d'intersection vide. Soit A un ensemble fini et $(A_1, \dots, A_n)$ une partition de A. Que dire du cardinal de A ? (pas de preuve demandée)

1. (Factorielle, $n!$) On dispose de n jetons numérotés de 1 à n. On les tire tous l'un après l'autre et on note leurs numéros dans l'ordre du tirage. Combien de suites différentes peut-on obtenir ?

2. (Arrangements, A_n^k) On dispose de n jetons numérotés de 1 à n. On les tire l'un après l'autre et on note leurs numéros dans l'ordre du tirage, mais cette fois, on s'arrête après en avoir tiré k. Combien de suites différentes peut-on obtenir ?

3. (Combinaison, $\binom{n}{k} = C_n^k$) On souhaite disposer k billes identiques dans $n \geq k$ trous numérotés, en en mettant au plus une par trou. Combien de dispositions sont possibles ?

4. Soient A et B deux ensembles. On appelle *produit cartésien* de A et B, et on note $A \times B$, l'ensemble des couples (a, b) avec a dans A et b dans B. Que dire du cardinal de $A \times B$ lorsque A et B sont finis ?

5. Soient A et B deux ensembles finis. Combien y a-t-il de fonctions de A dans B ?

6. Soient A et B deux ensembles et f une fonction de A dans B.

   - f est dite *injective* si pour tout $x \neq y$ dans A, $f(x) \neq f(y)$. On dit aussi que f est une *injection* de A dans B.
   - f est dite *surjective* si pour tout $z \in B$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = z$. On dit aussi que f est une *surjection* de A dans B.
   - f est dite *bijective* lorsqu'elle est à la fois une injection et une surjection. On dit aussi que f est une *bijection* de A dans B.

   Si A et B sont finis, que peut-on dire de leurs cardinaux respectifs dans chacun de ces trois cas ? Si on note $f^{-1}(\{b\})$ l'ensemble des antécédents de b, c'est-à-dire l'ensemble des a tels que $f(a) = b$, montrer que $\mathrm{Card}(A) = \sum_{b \in B} \mathrm{Card}(f^{-1}(\{b\}))$.

7. n joueurs s'affrontent dans un tournoi à l'issue duquel seuls les k premiers sont classés. Combien de classements différents est-il possible d'obtenir à l'issue du tournoi ?

8. On lance n pièces de monnaie équilibrées. Quelle est la probabilité de tomber exactement k fois sur pile ?

9. On tire n boules dans une urne qui contient r boules rouges et b boules bleues. Dans une première expérience, on remet les boules dans l'urne après tirage. Dans une seconde, on ne remet pas les boules. Quelle est la probabilité de tirer exactement k boules rouges dans chacune des expériences ?

10. Combien y a-t-il de façons de découper un segment de longueur n en k segments de longueur entière strictement positive ?

11. Sur un engrenage à n roues, deux arcs de k et l dents contiguës (sans dent commune) ont été arrachés. Combien d'engrenages différents peuvent correspondre à cette description ?

12. Une fourmi se déplace sur un quadrillage carré d'intersection en intersection, mais seulement vers le nord ou l'est. Quel est le nombre de chemins de longueur n après lesquels elle s'est déplacé exactement k fois vers le nord ?

13. Quel est le nombre de suites strictement croissantes à k éléments dans $\{1, \ldots, n\}$? (*) Et de suites croissantes ?

14. On lance n pièces de monnaie lestées de sorte qu'on obtient pile avec probabilité p et face avec probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité de tomber exactement k fois sur pile ?

15. On rappelle que tout entier naturel peut s'écrire de manière unique sous la forme $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ avec $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des nombres premiers et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des entiers naturels. Soit n un entier naturel pour lequel on suppose connu les p_i et α_i. Combien a-t-il de diviseurs ?

16. Un mathématicien peu confiant en ses capacités de calcul mental doit multiplier n termes de la forme $(\triangle x + \triangledown y)$, où les symboles peuvent prendre des valeurs réelles différentes dans chaque terme. Pour vérifier qu'il n'a rien oublié, il souhaite savoir combien il doit sommer de termes en $x^k y^{n-k}$. Pouvez-vous l'aider ?

17. Quel est le nombre de façons d'empiler n jetons de poker en k piles non vides ?

18. Un patron de PMU entreprenant aimerait lancer son propre Loto. Chaque tirage comprendrait k numéros entre 1 et n, sans répétition. Quelle est la probabilité qu'un joueur trouve tous les bons numéros en jouant au hasard ? (*) Qu'il en trouve l ? Si le patron impose que l'ordre des numéros est important, que devient la probabilité d'avoir tout bon ?

19. Quel est le nombre d'injections d'un ensemble à a éléments dans un ensemble à b éléments ? Et de bijections ?

Formule du binôme

1. Montrer par le calcul puis par un argument de dénombrement que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ lorsque $n < k$ ou $k < 0$).

2. Montrer de deux façons que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

4. On tire n boules. Chacune est soit blanche, soit noire, avec probabilité 1/2, de manière indépendante. Quelle est la probabilité de tirer un nombre pair de boules noires ? Un nombre impair de boules noires ? Et si la probabilité de tirer une boule blanche est p ?

5. Montrer que $\sum_{l=0}^{k} \binom{m}{l} \binom{n}{k-l} = \binom{m+n}{k}$

La suite de Fibonacci La ferme Mathuvu décide de commencer un élevage de lapins. Elle commence par acheter un couple de bébés lapins à l'année 0. Chaque année à partir de sa deuxième incluse, un couple de lapin donne naissance à un autre couple. Au bout d'un an, la ferme a donc 1 couple, au bout de deux, 2 couples, au bout de 3, 3 couples, au bout de 4, 5 couples, etc.

1. Ecrire une relation de récurrence sur le nombre de lapins à l'année n, que l'on notera F_n.

2. Trouver tous les réels q tels que la suite $u_n = q^n$ vérifie cette relation de récurrence.

3. On admet que la suite F_n est une combinaison linéaire des suites de la question précédente, autrement dit elle peut s'écrire sous la forme $\alpha u + \beta v + \dots$ où u et v sont les suites de la question précédente et α et β sont des réels. En prenant en compte les conditions initiales, déduire l'expression de F_n.

4. Quelle serait la formule si chaque couple engendrait deux couples par an au lieu d'un ?

Formule du crible

1. Soient A et B deux sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$. Exprimer le cardinal de $A \cup B$ en fonction de ceux de A, B et $A \cap B$.

2. Soient $A_1, \dots, A_k$ des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$. Corrigez la formule suivante, puis

démontrez-la.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_k) = & \sum_{a=1}^{k} \mathrm{Card}(A_a) \\
& - \sum_{a,b=1}^{k} \mathrm{Card}(A_a \cap A_b) \\
& + \sum_{a,b,c=1}^{k} \mathrm{Card}(A_a \cap A_b \cap A_c) \\
& - \dots \\
& + (-1)^{k-1} \mathrm{Card}(A_1 \cap \dots \cap A_k)
\end{aligned}
$$

3. Soit n un nombre entier et p un nombre premier. On appelle valuation p-adique de n le plus grand entier k tel que p^k divise n. Quelle est la valuation p-adique de $n!$? On se contentera d'une expression sous la forme d'une somme.

4. (*) Un bénévole distribue des bonbons à une classe d'écoliers. Comme il est étourdi et que la classe est très turbulente, il donne ses friandises au hasard. Sachant qu'il donne n bonbons et que la classe comporte k élèves, quelle est la probabilité que chaque élève reçoive un bonbon ?

Exercice plus avancé

1. (**) On tire n boules. Chacune est soit blanche, soit noire, avec probabilité $1/2$, de manière indépendante. Quelle est la probabilité de tirer un nombre de boules noires congru à 0, 1, 2 ou 3 modulo 4 ? 0, 1 ou 2 modulo 3 ?