Calculs pratiques et amusants

23 janvier 2016

Résumé de cours

Formules

Soit a, b sont quelconques, et n un entier naturel.
Rappel du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \binom{n}{k}$.
Si n est quelconque,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + b^{n-1}).$$

En particulier ($b = 1$), $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = a^n - 1$.

Si n est **impair**,

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - ba^{n-1} + b^2a^{n-2} - \cdots + b^{n-1}).$$

Identité de Sophie Germain : $a^4 + 4b^4 = (a^2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$.

Télescopages

C'est plus un principe de calcul, un mode de raisonnement, voire une façon de vivre qu'un savoir formel. Mettons que l'on ait une somme telle que chaque terme se découpe en deux : par exemple,

$$S = \sum_{i=1}^{10} i - (i-1) = (1-0) + (2-1) + (3-2) + \cdots + (10-9).$$

Eh bien à part les deux termes extrémaux ($(1-0)$ et $(10-9)$), la partie gauche d'un terme se simplifie avec la partie droite du terme suivant, et la partie droite se simplifie avec la partie gauche du terme précédent. Il ne reste plus que la partie droite du terme tout à gauche et la partie gauche du terme tout à droite. Concrètement,

$$S = -0+1-1+2-2+3-3+4-4+5-5+6-6+7-7+8-8+9-9+10 = -0+10 = 10.$$

Cet exemple est très simple : on peut écrire $S = \sum_{i=1}^{10} 1 = 10 \times 1 = 10$. Toutefois, les télescopages permettent de démêler des situations plus embrouillées (voir les exos).

Avec un produit, chaque facteur doit s'écrire comme une fraction, le numérateur se simplifiant avec le dénominateur d'un voisin, et le dénominateur partant avec le numérateur de l'autre voisin. Bien sûr, on peut imaginer des choses plus complexes, comme des télescopages où chaque terme se découpe en, mettons, 4 morceaux qui se simplifient avec les 2 voisins de gauche et les 2 de droite, mais c'est déjà plus rare.
Citons pourtant un mécanisme assez fréquent : lorsque le terme n'est pas encore en deux parties, on peut chercher à l'écrire sous la forme $\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, la partie "$\frac{1}{a}$" se simplifiant avec la partie "$\frac{1}{b}$" d'un terme voisin.

Exercices

Identités et développements

Exercice 1
Soit $z \neq 0$. Montrer que si $z + \frac{1}{z}$ est entier, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n + \frac{1}{z^n}$ l'est aussi.

Exercice 2
Montrer que $14^n - 1$ n'est pas premier si $n > 1$, et ce de deux manières.

Exercice 3
Montrer de deux manières que si n est impair, alors $8^n + 1$ n'est pas premier. Et pour n pair ?

Exercice 4
Soit $2^n + 1$ un nombre premier, montrer que n est une puissance de 2.

Exercice 5
Montrer que pour tout entier naturel n, $n^4 + 4^n$ n'est pas premier.

Exercice 6
Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercice 7
Sur chacune des six faces d'un cube est écrit un entier positif. Pour chaque sommet du cube, on regarde le produit des nombres des 3 faces attenantes. On somme les 8 nombres ainsi obtenus et on obtient 70. Quelle est la somme des nombres sur les faces du cube ?

Exercice 8
Sachant que $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ et $a^3 + b^3 + c^3 = 21$, calculer $ab + bc + ca$ et abc.

Exercice 9
Quel est le coefficient de $a^4b^3c^2$ dans le développement de $(a - 2b + c)^9$? Proposer une méthode pour calculer vite fait bien fait ce développement.

Télescopes en tous genres

Exercice 10
Calculer $S = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \ldots + \frac{1}{99\times100}$ et $S' = \frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{98\times99\times100}$.

Exercice 11
Calculer $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 12
Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 49$.
Exercice 13
Trouver un télescopage pour calculer $\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ pour $p = 1, 2, 3, 4$.

L'autre Goûter

Exercice 14
Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$.
Exercice 15
Prouver que $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{1001}{1002} < \frac{1}{\sqrt{1003}}$.
Exercice 16
Soit u_n une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Montrer que $u_{1012} > 45$.

À emporter

- http ://www.imosuisse.ch/skripte/skripte/imovorbereitung/teleskop/fr-teleskop.pdf
- *Les mathématiques du COK*, Marc Bachmakov, ACL-les éditions du Kangourou.

Corrections

On ne va pas tout vous dire quand même... voici des indications généreuses. Nous avons traité en cours les exercices 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12 et 15.
Solution de l'exercice 1
On fait une récurrence d'ordre 2 sur n.
Initialisation : si $n = 1$ c'est l'énoncé, si $n = 2$, $(z + \frac{1}{z})^2 - 2 = z^2 - \frac{1}{z^2}$ d'où le résultat.
Hérédité : On suppose que pour un certain $n \geq 2$, $z^n + \frac{1}{z^n}$ et $z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}$ sont entiers. Pour faire apparaître la puissance $n+1$ sans trop de termes, on calcule :

$$\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) + \left(z^{n+1}\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

le terme de gauche est entier par hypothèse de récurrence. On voit qu'on a bien besoin de l'hypothèse au rang $n-1$ également pour obtenir le résultat voulu.

Solution de l'exercice 2
On a $14^n - 1 = (14-1)(1 + 14 + \cdots + 14^{n-1}) = 13(1 + 14 + \cdots + 14^{n-1})$. Or si $n \geq 2$, $1 + \cdots + 14^{n-1} > 1$ ce qui assure que $14^n - 1$ est le produit de deux entiers strictement plus grands que 1, donc n'est pas premier.
On peut aussi raisonner modulo 13 (voir le cours d'arithmétique) : $14^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod 13$.
Mais ce n'est *a priori* pas évident de deviner que c'est modulo 13 et pas autre chose qu'il est bon de regarder.

Solution de l'exercice 3
Une première manière de faire est d'appliquer ce que nous savons sur $a^n + b^n$ quand n est impair.

Ici, on a que $8^n + 1^n = (8+1)(1 - 8 + 8^2 - \cdots + 8^{n-1})$. On a donc affaire à un multiple de 9, qui n'est pas premier.
Comme dans l'exercice 2, on peut aussi raisonner modulo 9, si on écrit $n = 2k+1$, $8^n + 1 \equiv 8 \times 8^{2k} + 1 \equiv 8 \times 64^k + 1 \equiv 8 \times 1^k + 1 \equiv 0 \pmod 9$.
Si n est pair, pour utiliser la factorisation précédente, il faut un exposant impair et... nous l'avons ! En effet, $8 = 2^3$, donc :

$$8^n + 1 = 2^{3n} + 1 = (2^n)^3 + 1^3 = (2^n + 1)((2^n)^2 - 2^n + 1).$$

Le premier facteur est toujours strictement plus grand que 1. Le second l'est dès lors que $2^{2n} > 2^n$, soit $2n > n$, soit $n > 0$. Donc $8^n + 1$ n'est jamais premier.

Solution de l'exercice 4
Si n n'est pas une puissance de 2, on peut écrire $n = ab$ avec $b > 1$ impair. On a alors

$$2^n + 1 = (2^a)^b + 1^b$$

et on factorise comme dans les exercices précédents, en vérifiant que les facteurs sont différents de 1.

Solution de l'exercice 5
Si n est pair, on a affaire à un nombre pair autre que 2. Si n est impair, écrivons, $n = 2k+1$. On a $n^4 + 4n^4 = n^4 + 4 + 2^{4k}$. On applique alors l'identité de Sophie Germain à $a = n$ et $b = 2^k$. Le facteur $a^2 + 2b^2 - 2ab = (a-b)^2 + b^2$ est plus grand que $b^2 = 4^k > 1$ pour $k > 0$, soit $n > 1$, ce qui nous convient. L'autre facteur est encore plus grand, donc $n^4 + 4^n$ est composé.

Solution de l'exercice 6
Utiliser (plusieurs fois) $a^n - b^n$ avec $a = 2$ et $b = 1$. On obtient $(n-1)2^{n+1} + 2$.

Solution de l'exercice 7
On note a, b, c, d, e, f les valeurs des faces, de sorte que $(a,b), (c,d), (e,f)$ soient opposées par exemple. Écrire la somme cherchée et la factoriser...Indice : $a+b$ apparaît dans la factorisation.

Solution de l'exercice 8
On cherche abc et $ab + bc + ca$ en fonction des trois autres expressions. Essayer de les exprimer en regardant $a+b+c$, $(a+b+c)^2$, $(a+b+c)^2(a+b+c)$ et $(a+b+c)^3$.

Solution de l'exercice 9
On utilise un raisonnement combinatoire (voir le cours du même nom) proche de celui qui établit la formule du binôme de Newton. Parmi les 9 facteurs du produit, il faut choisir 4 "a", 3 "$-2b$" et 2 "c". On choisit d'abord les "a" : on a "4 parmi 9" possibilités, soit : $\binom{9}{4}$. Pour chacune de ces possibilités, il faut encore choisir, mettons, 2 "c" parmi les termes restants, soit $\binom{9-4}{2} = \binom{5}{2}$.
Ainsi, le coefficient de $a^4(-2b)^3c^2$ est $\binom{9}{4} \times \binom{5}{2} = 126 \times 10 = 1260$.
Donc celui de $a^4b^3c^2$ est :

$$-8 \times 1260 = -10080.$$

Solution de l'exercice 10
C'est une première application d'un découpage de la forme $\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.
Voici une petite identité très utile : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. On peut écrire :

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right).$$

Par télescopage ($-\frac{1}{2}$ se simplifie avec $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ avec $+\frac{1}{3}$ etc.),

$$S = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

Pour calculer S', on utilise une identité similaire : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$.

Solution de l'exercice 11

Ce coup-ci, un produit, de terme général $1 - \frac{1}{i^2} = \frac{i^2-1}{i^2} = \frac{i-1}{i} \times \frac{i+1}{i} = \frac{\left(\frac{i-1}{i}\right)}{\left(\frac{i}{i+1}\right)}$. Appelons P le produit cherché, on obtient donc par télescopage :

$$P = \frac{1/2}{2/3} \times \frac{2/3}{3/4} \times \cdots \times \frac{(n-1)/n}{n/(n+1)} = \frac{1/2}{n/(n+1)} = \frac{n+1}{2n}.$$

Solution de l'exercice 12

Utilisons cette fois l'identité $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$ (qui découle de la troisième identité remarquable appliquée à $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$. On se ramène donc à estimer :

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{9999}-\sqrt{9997}}{2} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{3}-\sqrt{1}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{9999}-\sqrt{9997})\right).$$

Par télescopage, cette somme vaut $\frac{1}{2}(\sqrt{9999} - \sqrt{1})$. Il reste à prouver que : $\sqrt{9999} - 1 > 2 \times 49$, soit $9999 > 99^2$, or $97^2 = 9801$.

Solution de l'exercice 13

Il y a une méthode technique : on cherche une fonction f de degré 2 (un polynôme, en fait) telle que $f(k+1) - f(k) = k^p$. Pour $p = 1$, essayons $f(x) = x^2$: $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$. Pour tuer le 1, on corrige par une fonction de degré 1 en posant $g(x) = f(x) - x$. On a bien $g(k+1) - g(k) = 2k$. Et on divise le tout par 2 pour passer de $2k$ à k. Finalement, on peut écrire :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = F(2) - F(1) + \cdots + F(n+1) - F(n) = F(n+1) - F(0)$$

avec $F(x) = \frac{g(x)}{2} = \frac{x^2-x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$. Donc

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour $p > 1$, on prend x^{p+1}. Puis dans $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$, on élimine le terme parasite en k^p avec $C \times x^p$ où C est un réel bien choisi. On continue en éliminant le nouveau terme en k^{p-1}, etc.

Solution de l'exercice 14

Utiliser l'identité de Sophie Germain pour le dénominateur. Le terme général peut se réécrire $\frac{4k}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)} = \frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2k^2+2k+1} = \frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2-2(k+1)+1}$.

Solution de l'exercice 15

Pour un télescopage classique, il manque un terme sur deux : $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, etc. On peut poser P le produit de gauche dans l'énoncé, P' le produit des termes "manquants". Regarder $P \times P'$ et comparer P et P'...

Solution de l'exercice 16

Remarquer que si on pose $v_n = u_n^2$, on a $v_{n+1} = v_n + 2 + \frac{1}{u_n^2} > v_n + 2$.