Topologie algébrique

Intervenant : Ludovic Monier, Scribe : Alain Delaët

I Topologie

1. Espace métrique

def. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une *distance* ssi :

- séparabilité $\forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- symétrie $\forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = d(y,x)$
- inégalité triangulaire $\forall (x,y,z) \in E^3, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

def. La structure (E,d) est un *espace métrique* ssi d est une distance sur E.

rem. On pourrait généraliser la suite des définitions de topologie et topologie algébrique au cas d'un espace topologique général, c'est à dire un ensemble E muni de tous ses ouverts. L'ensemble des ouverts de E est une *topologie*.

def. Si $x \in E, r \geq 0$, on définit les notions suivantes :

- Boule ouverte notée : $B_o(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$
- Boule fermée notée : $B_f(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$
- Sphère notée : $S(x,r) = \{y \in E : d(x,y) = r\}$

Si $E = R^n$, on note la sphère de rayon r centrée en 0 : S_r^{n-1}. La boule fermée de rayon r centrée en 0 est noté D_r^n. Si $r = 1$, on ne note pas le r.

On remarque que S^1 correspond au cercle unité de $\mathbb{C}$.

def. Soit (E,d) un espace métrique.

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *converge* vers une limite u et on note $u_n \to u$ ssi
$$d(u_n, u) \to 0$$
- Une application $f : (E,d_1) \to (F,d_2)$, est dite *continue* en $x \in E$ ssi
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in E, d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$
Altérnativement, si l'image réciproque $f^{-1}(U)$ d'un ouvert est un ouvert. Si f est continue en x pour tout $x \in E$, on dit que f est *continue* et on note $f \in \mathcal{C}^0(E,F)$.

prop. *Une fonction f est continue en a ssi*
$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}, a_n \to a \Rightarrow f(a_n) \to f(a)$$

preuve. On procède par implication-réciproque

$\boxed{\Leftarrow}$ Par définition de la convergence d'une suite, elle sera dans une boule ouverte de rayon δ au bout d'un n_0. On utilise la définition de continuité.

$\boxed{\Rightarrow}$ On raisonne par contraposée. Si f est non continue, alors il existe dans chaque boule $B_o(x_0, \delta)$ un a_δ qui a son image qui n'est pas dans la boule $B_o(f(x_0), \varepsilon)$. Il suffit de prendre $\delta = 1/n$ pour définir une suite qui converge vers x_0 mais qui a son image ne convergeant pas vers $f(x_0)$.

$\square$

def. Soit $X \subset E$ une partie de E. X est dit :

- *ouvert* ssi $\forall x \in X, \exists \varepsilon > 0, B_o(x, \varepsilon) \subset X$
- *fermé* ssi $E \setminus X$ est ouvert.

def. Un *voisinage* d'un point x dans un espace métrique E est une partie de E contenant un ouvert contenant x.

def. Un espace métrique X est dit *compact* ssi toute suite à valeur dans X admet une sous-suite extraite convergente.

prop. *Pour $E = R^n$, une partie X de E est compact ssi elle est fermée et bornée.*

def. Soit $f : (E, d) \to (E', d')$. L'application f est un *homéomorphisme* ssi
- f bijective
- f continue
- f^{-1} continue

Le but de ce document est de regarder quels espaces métriques sont *homéomorphes* (possèdent un homéomorphisme entre eux.)

2. Connexité

def. Un espace métrique (E, d) est dit *connexe par arcs* (cpa) ssi

$$\forall (x, y) \in E^2; \exists \gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], E), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

On appelle γ un chemin de x vers y.

def. Un espace métrique (E, d) est dit *connexe* ssi E n'est pas l'union disjointe de deux ouverts non triviaux.

On remarque que si $E = Y_1 \bigsqcup Y_2$ deux ouverts, alors Y_1 et Y_2 sont également fermés.

thm. *L'ensemble $[0,1]$ est connexe.*

preuve. Supposons que $[0,1]$ ne soit pas connexe, alors il existe un ouvert-fermé non trivial, on le note Y et quite à considerer son complémentaire, on peut supposer $0 \in Y$. Supposons $Y \neq [0,1]$. L'ensemble

$$A = \{x \in [0,1] : [0, x] \subset Y\}$$

est non vide. Comme Y est fermé $s = \sup A$ est dans Y. Or Y est ouvert donc $\exists \delta > 0$ tel que $B_0(s, \delta) \subset Y$. Si $s \neq 1$ c'est absurde car $\min(s + \delta/2, 1) \in Y$. $\square$

thm. *Si $X \subset E$ est connexe par arcs, alors il est connexe.*

preuve. Par l'absurde si X cpa, et non connexe. Il existe X_1 et X_2 ouverts non vide tels que $X = X_1 \bigsqcup X_2$. On prend $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$.

Il existe $\gamma : [0,1] \to X, \mathcal{C}^0$ telle que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$.

Donc $\gamma^{-1}(X_1)$ est ouvert non vide, et $\gamma^{-1}(X_2)$ ouvert non vide. De plus, $X = X_1 \bigsqcup X_2$, donc $\gamma^{-1}(X_1) \bigsqcup \gamma^{-1}(X_2) = [0,1]$, or $[0,1]$ est connexe. Absurde ! $\square$

II Groupe

def. Un ensemble munit d'une loi de composition interne $(G, \cdot)$ est un groupe ssi il est :
- associatif : $\forall (x, y, z) \in G^3, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- element neutre : $\exists e_G \in G, \forall x \in G, x \cdot e_G = e_G \cdot x = x$
- inversibilité : $\forall x \in G, \exists y \in G, x \cdot y = y \cdot x = e_G$

Par exemple $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe, mais pas $(\mathbb{Z},\cdot)$ car 2 n'a pas d'inverse. $(\mathbb{Z},-)$ n'est pas un groupe car la loi $-$ n'est pas associative.

def. Une application $\varphi : (G,+) \to (H,\circ)$ est un morphisme de groupe ssi :

$$\forall (x,y) \in G^2, \varphi(x+y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

Si $\varphi : (G,+) \to (G,+)$, alors c'est un endomorphisme. Si φ est bijectif, c'est un isomorphisme. Si φ est endo et iso, alors c'est un automorphisme.

def. Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Le *groupe engendré* par $X \subset G$ noté $\langle X \rangle$ est défini par :

$$\langle X \rangle = \left\{ \prod x_i^{k_i} : x_i \in X, k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Il s'agit du plus petit sous groupe de G contenant X.

III Topologie algébrique

def. Un *lacet* φ est un chemin tel que :

$$\varphi : [0,1] \to X, \mathcal{C}^0, \varphi(0) = \varphi(1)$$

Il y a deux branches de la topologie algébrique, l'homotopie, et l'homologie. L'homologie est nettement moins accessible que l'homotopie, c'est donc cette dernière que l'on va étudier. Et bien sur, en déduire des théorèmes rigolos.

1. Homotopie

def. Soient X et Y deux parties d'espace métriques. Et $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ deux applications continues. On dit que f et g sont *homotopes* et on note $f \simeq g$ ssi il existe une fonction $H : X \times [0,1] \to Y$ telle que :

- H est continue
- $\forall x \in X, H(x,0) = f(x)$
- $\forall x \in X, H(x,1) = g(x)$

La fonction H est appelée *homotopie*. On dit qu'une homotopie est une *homotopie relative* à $A \subset X$ ssi

$$\forall t \in [0,1], \forall a \in A, H(a,t) = f(a) = g(a)$$

def. Deux lacets sont dit *équivalents* s'il existe une homotopie relative à $\{0,1\}$ entre les deux lacets.

$$\forall t \in [0,1], H(0,t) = H(1,t)$$

Si c'est le cas, on note x_0 la valeur commune ci-dessus, et on note $\mathcal{L}_{x_0}$ l'ensemble des lacets qui ont comme point d'accroche x_0.

def. Le *lacet constant* en $x_0 \in X$ est l'application

$$c_{x_0} : [0,1] \to X, \forall t \in [0,1], c_{x_0}(t) = x_0$$

def. On dit que (X, x_0) est simplement connexe ssi tout lacet est homotope au lacet constant en x_0.

$$\forall \gamma \in \mathcal{L}_{x_0}, \gamma \simeq c_{x_0}$$

prop. *Si X est convexe alors X est simplement connexe.*

preuve. Soit $x_0 \in X$.

$$\forall f \in \mathcal{L}_{x_0}, H(x,t) = tf(x) + (1-t)x_0$$

□

2. Groupe fondamental

def. On définit la loi de composition interne $\cdot$ sur les lacets γ_1, γ_2 de $\mathcal{L}_{x_0}$ par

$$\forall (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \in \mathcal{L}_{x_0}, (\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

def. Soit $\gamma \in \mathcal{L}_{x_0}$. On définit $[\gamma]$: la classe d'équivalence de γ pour la relation d'homotopie.

thm. *L'ensemble des classes d'équivalence des lacets sur X en $x_0 \in X$ muni de l'opérateur $\cdot$ forme un groupe. On l'appelle le* groupe fondamental *de X par rapport à x_0 et on le note :*

$$\Pi_1(X, x_0)$$

preuve. La preuve n'est pas détaillée ici, car elle est longue et fastidieuse : on passe beaucoup de temps à démontrer des choses évidentes (comme l'existence d'un inverse, ou l'associativité). L'élément neutre est $[c_{x_0}]$. □

def. Soient E et B deux espaces métriques. Une application de E dans B continue surjective p est un *revêtement* si pour tout $b \in B$, il existe un voisinage V de b, un espace discret F et un homéomorphisme $\varphi : V \times F \to f^{-1}(V)$ tel que :

$$\forall v \in V, \forall f \in F, p \circ \varphi(v,f) = v$$

thm (de relèvement). *Si f est une application continue de $[0,1]$ dans S^1, alors il existe une application continue $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$. $\tilde{f}$ est appelé relèvement de f.*

def. Le *degré* d'un lacet est défini par

$$\deg(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$$

C'est intuitivement le *nombre de tour* que fait le lacet γ autour de 0.

thm. *Soient γ et γ' deux lacets :*

$$\gamma \simeq \gamma' \Leftrightarrow \deg(\gamma) = \deg(\gamma')$$

preuve. On procède par implication-réciproque

$\boxed{\Rightarrow}$ On utilise des homotopies relevées.

$\boxed{\Leftarrow}$ On projette l'homotopie $\tilde{H}$.

□

thm. *Le degré est un isomorphisme du groupe fondamental $\Pi_1(S^1, 0)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$*

thm. *Soit $\gamma : S^1 \to S^1$ continue.*

$$\deg(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \exists \gamma' : D^2 \to S^1, \mathcal{C}^0 \textit{ telle que } \gamma'|_{S^1} = \gamma$$

preuve. On procède par implication-réciproque

$\boxed{\Leftarrow}$ On pose $H(z,t) = \gamma'(zt)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Comme $\deg(\gamma) = 0$, $\gamma \simeq c_{x_0}$. Soit H une homotopie entre c_{x_0} et γ. On définit

$$\gamma' : \begin{cases} [0,1].S^1 = D^2 & \to & S^1 \\ t.z & \mapsto & H(z,t) \end{cases}$$

□

IV Applications

1. Théorèmes rigolos

thm (D'Alembert-Gauss)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Il admet au moins une racine complexe.*

preuve. Supposons que P n'a pas de racine. On note n le degré de P. On considère l'application suivante :

$$f_r : \begin{cases} S^1_r & \to & S^1 \\ x & \mapsto & \frac{P(x)}{||P(x)||} \end{cases}$$

Cette application est bien définie pour tout $r \geq 0$ car P ne s'annule pas. Il s'agit également d'un lacet. On va prouver que le $\deg(f)$ est nul et égal à n.

- Quand r tend vers 0. On considère l'application
$$H_1(z,t) = \frac{P(tz)}{||P(tz)||}$$
On remarque que $H_1(z,1) = f_1(z)$ et que $H_1(z,0) = f(0)$. Donc $f \simeq c_{x_0}$. On en déduit que $\deg(f) = 0$.
- Quand r tend vers ∞. On considère l'application
$$H_2(z,t) = \frac{t^n \cdot P(z/t)}{||t^n \cdot P(z/t)||}$$
$$t^n \cdot P(z/t) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} t + \cdots$$
Donc, $H_2(z,0) = a_n z^n$ et $H_2(z,1) = f_1(z)$. Donc $f_1(z) \simeq z^n$. Or, $\deg(f) = \deg(z \mapsto z^n) = n$

On en déduit que $n = 0$. □

thm (Borsuk-Ulam trivial)**.** *Si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continue, alors*

$$\exists x \in S^1, f(x) = f(-x)$$

preuve. Il y a deux démonstrations, une qui est une application directe du TVI. Et l'autre qui utilise la connexité.

On définit l'application

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}$$

On remarque que $g(-x) = -g(x)$, or $g : S^1 \to \{-1,1\}$. Or l'image d'un cpa est un cpa, donc $g(S^1) \neq \{-1,1\}$. Absurde ! □

thm (Borsuk-Ulam)**.** *Si $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ continue, alors*

$$\exists x \in S^2, f(x) = f(-x)$$

preuve. On définit g comme étant l'application $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f(-x)||}$. Elle est définie de S^2 dans S^1. On pose $g = f|_{S_1}$ la restriction de g sur l'équateur. On va prouver que g est de degré nul, et de degré impair.

- $\deg(g) = 0$
Il suffit d'utiliser le lemme : g se prolonge à D^2 par un hémisphère de S^2.

- $\deg(g) \equiv 1\,[2]$
  On remarque que g est impaire, $g(t)/g(-t) = -1$. D'après le théorème de relèvement, il existe un relèvement $\tilde{g}$ de g au travers de p.

$$p(t) = e^{2i\pi nt}, p \circ \tilde{g} = g$$

Les antécédents de -1 par p sont les éléments de $1/2 + \mathbb{Z}$. Donc :

$$\tilde{g}(t + 1/2) - \tilde{g}(t) = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

On en déduit le degré de g :

$$\deg(g) = \tilde{g}(1) - \tilde{g}\left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{g}\left(\frac{1}{2}\right) - \tilde{g}(0) = n + \frac{1}{2} + n + \frac{1}{2} = 2n+1$$

Mais $0 \not\equiv 1\,[2]$. C'est absude, d'où le résultat. □

> **thm.** *Soient A, B, C trois fermés de S^2 recouvrant S^2, l'un d'entre eux possède deux points antipodaux.*

preuve. On pose l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} S^2 & \to & R^2 \\ x & \mapsto & (d(x,A), d(x,B)) \end{array} \right.$$

D'après le théorème de Borsuk-Ulam, il existe un point x tel que $f(-x) = f(x)$.

- Si $f(x) = (0, b)$ alors $f(-x) = (0, b)$, donc $-x \in A$
- Si $f(x) = (a, 0)$ alors $f(-x) = (a, 0)$, donc $-x \in B$
- Si $f(x) = (a, b)$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $x \notin A$ et $x \notin B$, donc $x \in C$. Il en est de même pour $-x \in C$. □

> **thm** (Invariance du domaine)**.** *Soient U et V des ouverts de R^2 et R^n $(n \neq 2)$, non vides, U et V ne sont pas homéomorphes.*

preuve. On fait une disjonction de cas en fonction de n.

•Cas $n = 1$. Supposons qu'il existe un homéomorphisme f entre U et V. L'ouvert U étant non vide, il continent une boule ouverte $B_o(x, \delta)$. L'application f induit un homéomorphisme de cette boule sur un ouvert V', qui est cpa car U l'est. Or, $B_o(x, \delta) \setminus \{x\}$ est cpa, mais $V' \setminus \{f(x)\}$ ne l'est pas. Absurde !

•Cas $n \geq 3$. On va essayer de trouver une partie de V homéomorphe à S^2. Pour cela on va *particulariser les coordonnées* c'est à dire ne considere que trois d'entre elles.

Comme V est non vide, $\exists x \in V$. De plus, V est ouvert, donc il existe une boule pour la norme infinie ouverte de centre x. On note son rayon ε. On prend maintenant (y_1, y_2, y_3) dans la sphère de centre (x_1, x_2, x_3) et de rayon $\varepsilon/2$. On note y le vecteur $(y_1, y_2, y_3, x_4, x_5, \ldots, x_n)$.

L'ensemble de ces y est homéomorphe à S^2. En composant cet homéomorphisme avec l'homéomorphisme $f : V \to U$, on obtient une application $S^2 \to R^2$ continue et injective, ce qui est absurde par le théorème de Borsuk-Ulam. □

2. Lettres

Combien de classes d'homéomorphisme de lettres ?

Il y en a 9. On pose

$$N(k) = |\{x \in X : X \setminus \{x\} \text{ a } k \text{ composantes connexes}\}|$$

* *
*