Paradoxes de vote

Guillaume Conchon–Kerjan

Samedi 19 septembre 2015

Introduction

La multiplicité des systèmes de votes qui ont existé et existent encore amène à se demander s'il en existe un "plus juste", "plus naturel" que les autres. Nous réalisons ici une modélisation mathématique d'une élection.

Modèle

On suppose qu'il y a un nombre fini m de candidats et un nombre fini de votants $V_1, \cdots, V_N$ avec $N > 1$. Chaque votant donne une liste ordonnée des candidats, par ordre de préférence. Un **système de vote** est une fonction qui à l'ensemble des N listes de préférences personnelles associe une liste ordonnée des candidats qui est le résultat de l'élection : en particulier, le premier de la liste est le vainqueur du suffrage.

Exemples

Lorsque $m = 1$, il y a un unique candidat et le résultat de l'élection est clair, quel que soit le système choisi.
Lorsque $m = 2$, le vote majoritaire usuel semble satisfaisant : chaque votant a deux choix possibles, $A > B$ ou $B > A$. Si la majorité souhaite $A > B$, alors A remporte l'élection, dans le cas contraire, c'est B (et s'il y a égalité, on tire au sort ou on départage arbitrairement).
Lorsque $m = 3$, des complications apparaissent. Par exemple, dans une classe de 25 élèves, si on a 3 candidats, Alexandre, Béatrice et Corentin, alors on peut avoir 9 élèves qui classent $A > B > C$, 8 qui classent $B > C > A$ et 8 qui classent $C > A > B$. Ainsi, une majorité stricte (17 élèves) préfère Alexandre à Béatrice, une autre majorité (16) préfère Béatrice à Corentin, et une troisième préfère Corentin à Alexandre. On a une situation dans laquelle aucun(e) candidat(e) ne remporte tous ses duels face aux autres, appelée aussi "paradoxe de Condorcet".
En 1794, celui-ci propose, dans ce cas de figure, de se rabattre sur la méthode dite de Borda : chaque votant classe donc les candidats selon ses préférences, le premier se voit attribuer $m - 1$ points, le deuxième $m - 2$, etc. et le dernier 0 point. Le score de chaque candidat est la somme des points que lui donne chaque votant. On classe les candidats par score décroissant. En cas d'égalité, on procède à un tirage au sort.
Ce système ressemble à une coupe par étapes, où les concurrents marquent un certains nombre

de points à chaque étape en fonction de leur classement. Les candidats sont les concurrents, et les votants, les étapes.

Critères

On choisit (de manière critiquable, certes) 4 caractéristiques que doit respecter tout vote :
1] **(Universalité)** Chaque votant peut classer les candidats dans n'importe quel ordre.
2] **(Unanimité)** Si chaque votant classe A devant B, alors dans le classement final, A devance B.
3] **(Indifférence des Options Non Pertinentes)** Le classement final relatif de A et B (savoir si A est devant B ou l'inverse) ne dépend que du classement relatif de A et B pour chaque votant. Autrement dit, si les votants mettaient finalement A devant B d'après le système de vote, alors en rajoutant des candidats, on ne pourra pas modifier le résultat au point de pouvoir faire passer B devant A.
4] **(Pas de dictature)** Il n'existe pas de votant dont le classement personnel donne le classement des autres, quoi que fassent les autres votants.

Remarque 1 *Dans certaines versions, le deuxième critère est remplacé par la double condition suivante :*
- tout candidat peut être élu ("souveraineté")
-pour tout votant, classer A derrière B au lieu de faire l'inverse n'avantagera jamais B, quoi qu'aient fait les autres votants (autrement dit, il n'y a a pas de vote "stratégique", c'est-à-dire pas d'intérêt à voter autrement que selon ses préférences personnelles).

Remarque 2 *Le troisième critère n'est pas toujours vérifié dans un système assez répandu où l'on attribue une voix au candidat s'il est en tête de la liste d'un électeur et* 0 *sinon, le vainqueur étant élu à la majorité relative : mettons qu'il y ait trois candidats à la mairie d'un village de* 100 *habitants,* 60 *personnes votant $A > B > C$ et* 40 *votant $B > A > C$. Si parmi les électeurs de A, la moitié préfèrent finalement C, alors B remporte l'élection à la place de A, alors même que le classement relatif de A et B reste le même. Il existe des variantes concrètes de cela, lorsqu'un parti a priori plus populaire qu'un autre ne remporte pas l'élection parce qu'il se scinde en deux groupes, aucun des deux n'étant assez puissant pour l'emporter.*

Exercice 1
Montrer que la méthode de Borda vérifie les critères $1, 2, 4$ mais pas le 3.

Le théorème d'Arrow

Théorème 3 *Il n'existe pas de système de vote vérifiant simultanément les quatre critères si $m \geq 3$.*

Démonstration. On établit ce résultat en considérant un système vérifiant les trois premiers critères, et en montrant qu'il ne vérifie pas 4, autrement dit, un système universel, unanime où on ne peut pas "bidouiller" les résultats en rajoutant des candidats est une dictature. Étonnant, non ?
Première étape : Si A et B sont deux candidats quelconques, il existe un "pivot de B sur A".

Imaginons qu'initialement (situation 0), tout le monde met A en premier et B en dernier de sa liste. Par 2], A et B sont premier et dernier du classement final. En situation 1, V_1 échange A et B dans sa liste de vote. En situation 2, V_2 fait la même chose, etc. jusqu'à la situation N où tout le monde classe A dernier et B premier. Nécessairement, il existe $k \geq 1$ tel qu'en situation $k-1$, A arrive devant B au résultat du vote, et en situation k, B arrive devant A. V_k est le "pivot" cherché. Attention, on n'a pas démontré qu'il était également pivot de A sur B.
Observation importante : par IONP (le critère 3]), si on recommence l'expérience en imposant A devant B pour chaque votant au départ (pas forcément premier et dernier), il existera encore un pivot et ce sera le même !
Deuxième étape : Le pivot de B sur A est un dictateur de B sur C (où C est un troisième candidat, quelconque aussi), c'est-à-dire que s'il met $B > C$ dans sa liste, alors $B > C$ dans le résultat du vote, quoi que fassent les autres. En effet, appelons $V_1, \cdots, V_{k-1}$ les "premiers" votants et $V_{k+1}, \cdots, V_n$ les "derniers" et imaginons la situation suivante :
• Les premiers votent $B > C > A$.
• V_k et les derniers votent $A > B > C$.
Alors par unanimité, $B > C$ au classement final, et d'après la première étape, $A > B$, donc $A > B > C$. Maintenant, imaginons que V_k inverse B et A, et que les autres échangent éventuellement B et C dans leurs classement personnels. Alors le classement relatif de A et C reste le même pour chaque votant, donc par 3], $A > C$ dans le vote. Et d'après la première étape, $B > A$, donc $B > A > C$ dans le résultat final de l'élection. Concentrons-nous sur le classement relatif de B et C : par 3] une fois encore, on s'en fiche de la position de A. Que remarque-t-on ? Que lorsque V_k met $B > C$, quoi que fassent tous les autres... $B > C$ lors du vote ! Donc V_k est bien le dictateur cherché.
Troisième étape : (la plus fastidieuse et la moins intéressante) on vérifie que les dictateurs d'un candidat sur un autre (on a vu qu'il en existe toujours un) ne sont en fait qu'une seule et même personne. En effet, le pivot de B sur C n'arrive pas après le dictateur de B sur C (dans l'ordre préétabli des votants), donc il n'arrive pas après le pivot de B sur A d'après la deuxième étape. Par symétrie, il n'arrive pas avant non plus, donc le pivot de B sur C est celui de B sur A. Ainsi pour tous candidats A, C, le dictateur de B sur A est celui de B sur C. Ainsi, il n'y a qu'un seul dictateur sur B, c'est-à-dire une personne qui peut classer B devant n'importe quel candidat. Il existe aussi un dictateur sur A. Et, si ce n'est pas déjà le dictateur sur B, par 1], le dictateur sur B peut choisir $B > A$, et celui sur A peut choisir $A > B$, contradiction. Donc les dictateurs sur deux candidats quelconques ne sont qu'une seule et même personne. Conclusion : il n'existe qu'un seul dictateur, qui peut choisir de mettre n'importe quel candidat devant n'importe quel autre, sans qu'importent les votes des autres.

$\square$

Remarque 4 *Il existe une preuve plus élaborée et abstraite (c'est de la théorie des ensembles), qui montre notamment que dans la population, il existe des sous-ensembles dictatoriaux, ou juntes, c'est-à-dire des groupes tels que si tout le monde dans le groupe est d'accord sur un classement précis des candidats, alors ce sera le résultat de l'élection, quoique décident les autres votants. Par exemple, le dictateur dont nous avons montré l'existence est un une junte d'une personne. On montre notamment que l'intersection de deux juntes, si elle est non vide, est encore une junte (plus précisément, l'ensemble des juntes est un ultrafiltre). Dans le cas où il y a un nombre fini d'électeurs, on montre ainsi qu'il existe une junte d'une seule personne, et lorsqu'il* *y en a un nombre infini, on prouve qu'il peut exister une junte qui n'est pas réduite à une seule personne, mais qu'il y en aura toujours une qui fera une proportion arbitrairement petite de la population : la classe dirigeante ne représente ainsi même pas un pour cent de la population...*

Pour plus de détails, lire *Arrow's Theorem, Many Agents and Invisible Dictators* de Alan Kirman et Dieter Sondermann (Journal of Economic Theory, 5, 267-277 (1972), trouvable gratis sur le web).

Exercice 2

Pour chaque critère, trouver un système qui ne le vérifie pas mais qui vérifie les trois autres.

Indice : pour trouver un système qui contredit seulement le premier critère, on peut considérer le modèle de la "droite politique" : les candidats et les opinions des votants sont repérés par leur abscisse sur une droite. Un votant classe premier le candidat dont l'abscisse est la plus proche de la sienne, deuxième le candidat suivant dont l'abscisse est la plus proche de la sienne, etc. C'est ce qui se passerait chez nous si le classement des partis "du plus à gauche" au "plus à droite" était accepté comme pertinent par chaque électeur, mais ce n'est pas vraiment le cas...