Nombres chromatiques

Margaret Bilu

2 avril 2016

1 Nombre chromatique d'une partie de $\mathbf{R}$

Définition 1.1. Soit a un réel strictement positif, et soit $E \subset \mathbf{R}$ un sous-ensemble non vide. On appelle *a-coloriage* de E une manière d'attribuer une couleur à chaque élément de E de sorte que deux points de E à distance a soient toujours de couleurs différentes. Le *nombre chromatique* de E de paramètre a, noté $\chi(E, a)$, est défini comme le plus petit entier m pour lequel il existe un a-coloriage des points de E avec m couleurs.

1. On fixe un réel a. Donner un exemple de sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ tel que $\chi(E, a) = 1$.
2. On suppose que $\chi(E, a) = 1$ pour tout $a > 0$. Que dire de E ?
3. **Le nombre chromatique de la droite réelle.**
   a) Montrer que $\chi(\mathbf{R}, a)$ de dépend pas de a. On le note $\chi(\mathbf{R})$, et on l'appelle le nombre chromatique de $\mathbf{R}$.
   b) Déterminer $\chi(\mathbf{R})$.
   c) Existe-t-il une sous-partie E de $\mathbf{R}^n$ et un réel a tels que $\chi(E, a) \geq 3$?
   d) Déterminer $\chi(\mathbf{Q}, a)$ pour tout $a > 0$.

2 Nombre chromatique d'une partie de $\mathbf{R}^n$

On peut également définir la même notion de nombre chromatique pour une partie E du plan $\mathbf{R}^2$, de l'espace $\mathbf{R}^3$, ou même de l'espace à n dimensions $\mathbf{R}^n$. La distance entre deux points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ est donnée par la distance euclidienne usuelle :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Malheureusement, de nos jours on ne connaît toujours pas la valeur exacte de $\chi(\mathbf{R}^2)$, $\chi(\mathbf{R}^3)$, et encore moins celle de $\chi(\mathbf{R}^n)$ pour $n \geq 4$.

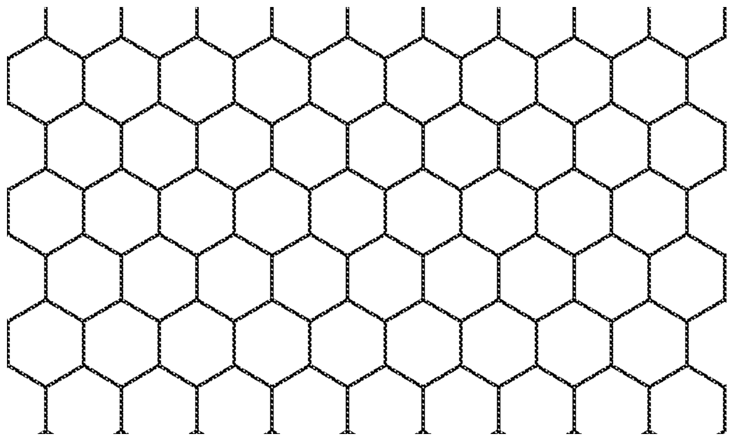
4. Soit C un cercle de rayon $\frac{1}{2}$. Que vaut $\chi(C, 1)$?
5. **Une borne inférieure pour le nombre chromatique du plan.**
   a) Montrer que $\chi(\mathbf{R}^2) \geq 3$.
   b) En trouvant une configuration de 7 points qui ne peut pas être coloriée avec 3 couleurs, montrer que $\chi(\mathbf{R}^2) \geq 4$.
6. **Une borne inférieure pour le nombre chromatique de l'espace à 3 dimensions.**
   a) Donner deux manières de voir que $\chi(\mathbf{R}^3) \geq 4$.
   b) S'inspirer de la construction de la question 5.b) pour montrer qu'en fait $\chi(\mathbf{R}^3) \geq 5$.

Note : La même technique se généralise en dimension supérieure pour montrer que $\chi(\mathbf{R}^n) \geq n+2$ pour tout $n \geq 2$, mais des méthodes plus élaborées permettent d'avoir des bornes inférieures bien meilleures pour $n \geq 5$.

7. **Une borne supérieure pour le nombre chromatique du plan.**

a) En pavant le plan par des carrés, montrer que $\chi(\mathbf{R}^2) \leq 9$.

b) Utiliser le dessin pour montrer qu'en fait $\chi(\mathbf{R}^2) \leq 7$. Malheureusement, nos connaissances sur le nombre chromatique du plan réel s'arrêtent là.



3 Points à coordonnées rationnelles dans le plan

Même si nous n'avons que l'encadrement $4 \leq \chi(\mathbf{R}^2) \leq 7$ pour le plan tout entier, il est possible de calculer précisément $\chi(\mathbf{Q}^2, 1)$.

On dit qu'un nombre rationnel est à dénominateur pair (resp. impair) si sa forme irréductible a un dénominateur pair (resp. impair). Par convention, la forme irréductible d'un entier $n \in \mathbf{Z}$ est $\frac{n}{1}$, donc tous les entiers sont à dénominateur impair. Soit E le sous-ensemble de $\mathbf{Q}^2$ des points dont chaque coordonnée est de dénominateur impair. Toutes les fractions écrites dans cet énoncé sont supposées irréductibles. On note 0 le point $(0,0) \in \mathbf{Q}^2$.

8. **Le nombre chromatique de E**

a) Montrer que la somme et la différence de deux éléments de E sont encore des éléments de E.

b) Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ des rationnels de dénominateur impair sous forme irréductible. Montrer que le numérateur de la forme irréductible de $\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}$ est pair si et seulement si $a - a'$ est pair.

c) Soit $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ un élément de E à distance 1 de 0. Montrer que a et c sont de parités différentes.

d) Soient $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ et $\left(\frac{a'}{b'}, \frac{c'}{d'}\right)$ des éléments de E à distance 1. Montrer que $a - a'$ et $c - c'$ sont de parités différentes.

e) En déduire que $\chi(E, 1) = 2$.

9. **Un découpage de $\mathbf{Q}^2$**

a) Montrer que si $\frac{a}{b}$ est à dénominateur impair, alors $\frac{a}{b} + \frac{1}{2}$ est à dénominateur pair, mais non divisible par 4.

b) Pour tout point $x \in \mathbf{Q}$, on note $x + E$ l'ensemble des points de $\mathbf{Q}^2$ de la forme $x + y$ avec $y \in E$. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathbf{Q}^2$ de la forme $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ avec b divisible par 2 mais pas par 4 et d impair est exactement l'ensemble $\left(\frac{1}{2}, 0\right) + E$.

c) Montrer que tous les éléments de $\mathbf{Q}^2$ à distance 1 de 0 sont des éléments de E.

d) En déduire que si $x \in \mathbf{Q}^2$ est à distance 1 d'un élément de $\left(\frac{1}{2}, 0\right) + E$, alors $x \in \left(\frac{1}{2}, 0\right) + E$.

e) On découpe $\mathbf{Q}^2$ en parties $(E_i)_{i\in I}$ de la manière suivante : on met x et y dans la même partie si et seulement si $x-y$ appartient à E. Montrer que deux éléments appartenant à deux parties distinctes ne sont jamais à distance 1.

f) Montrer que pour tout i, E_i est de la forme $x_i + E$, où $x_i \in E_i$.

g) Conclure que $\chi(\mathbf{Q}^2, 1) = 2$

4 Et avec une autre distance ?

La distance euclidienne n'est pas la seule distance possible que l'on peut définir sur $\mathbf{R}^n$.

Définition 4.1. Une distance sur $\mathbf{R}^n$ est une fonction d qui à tout couple de points (x, y) associe un réel positif $d(x, y)$, et vérifiant les conditions suivantes :

— (séparation) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

— (symétrie) pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$, $d(x, y) = d(y, x)$.

— (inégalité triangulaire) pour tous $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

En remplaçant dans la définition de nombre chromatique la distance euclidienne par une distance d, on peut définir une notion de nombre chromatique $\chi(E, a, d)$ par rapport à la distance d.
10. Vérifier que la fonction d_0 définie par $d_0(x, y) = 1$ si $x \neq y$, et 0 sinon, est une distance. On l'appelle la *distance triviale*. Soit $E \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble à au moins deux éléments. Que vaut $\chi(E, a, d_0)$ (discuter selon la valeur de a) ?
11. A partir de cette question, pour simplifier, on prend $n = 2$, c'est-à-dire qu'on se place dans le plan $\mathbf{R}^2$. On définit la fonction d_∞ par $d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, où $\max(a, b)$ désigne le plus grand parmi les deux réels a et b.

a) Vérifier que d_∞ définit bien une distance sur $\mathbf{R}^2$.

b) Vérifier que pour cette distance, comme pour la distance euclidienne, $\chi(\mathbf{R}^2, a, d_\infty)$ ne dépend pas de a.

c) Indiquer les points x du plan qui vérifient $d_\infty(x, 0) \leq 1$, et ceux qui vérifient $d_\infty(x, 0) = 1$.

d) En déduire que $\chi(\mathbf{R}^2, d_\infty) \geq 4$.

e) Vérifier qu'en fait $\chi(\mathbf{R}^2, d_\infty) = 4$.

5 Nombre chromatique d'un graphe

On appelle *graphe* un ensemble de points, appelés sommets, reliés par des arêtes. Un graphe est *simple* si deux sommets sont reliés par au plus une arête. Il est*sans boucle* si les deux extrémités d'une arête sont toujours distinctes. On supposera tous les graphes simples et sans boucle.

Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes qui en partent. Un graphe est dit *fini* s'il n'a qu'un nombre fini de sommets et d'arêtes. Un *chemin* entre deux sommets A et B est une suite d'arêtes reliant A et B. Un graphe est dit *connexe* si deux sommets quelconques peuvent toujours être reliés par un chemin. Un chemin qui parcourt au moins trois arêtes distinctes et qui revient sur lui-même s'appelle un *cycle*. Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

Définition 5.1. Soit G un graphe. Un *coloriage* du graphe G est une manière d'attribuer une couleur à chacun de ses sommets. On dit qu'un coloriage est *propre* si deux sommets reliés par une arête ont des couleurs différentes. On définit le *nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe G comme le plus petit entier n tel que G puisse être colorié avec n couleurs.

12. A quoi ressemble un graphe de nombre chromatique 1 ?
13. Soit G un graphe à m sommets. Montrer que $\chi(G) \leq m$.
14. Quel est le nombre chromatique d'un arbre ?
15. Définir une distance d sur l'ensemble des sommets S du graphe telle que $\chi(G)$ soit exactement $\chi(S, 1, d)$.

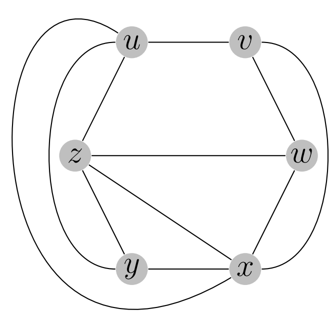
L'algorithme glouton Il existe beaucoup d'algorithmes pour trouver un coloriage propre d'un graphe fini. Nous allons présenter ici le plus connu, l'algorithme glouton (appelé ainsi probablement en référence au fait qu'il cherche toujours le sommet qui a le plus grand degré). Cet algorithme se déroule de la manière suivante.

1. On choisit un sommet non encore colorié de degré maximal et on le colorie d'une nouvelle couleur.
2. On colorie de cette même couleur, par ordre décroissant des degrés, tous les sommets non encore coloriés qui ne sont pas reliés à ce sommet, ni reliés entre eux. Plus précisément, on colorie un sommet de degré maximal non colorié et non relié au sommet colorié dans l'étape 1. Ensuite on colorie un sommet de degré maximal et non relié ni au sommet qu'on vient de colorier, ni au sommet colorié dans l'étape 1, et ainsi de suite.
3. S'il reste encore des sommets à colorier, on reprend à l'étape 1.

Cette procédure termine forcément puisque le nombre de sommets coloriés augmente au moins d'une unité à chaque fois.

Remarque 5.2. Il faut faire attention au fait que l'algorithme glouton ne permet pas nécessairement de calculer le nombre chromatique d'un graphe : il propose un certain coloriage propre, qui n'est pas nécessairement minimal.

16. A l'aide de l'algorithme glouton, proposer un coloriage du graphe suivant. En déduire son nombre chromatique.



17. Montrer grâce à l'algorithme glouton que le nombre chromatique $\chi(G)$ d'un graphe fini G vérifie

$$\chi(G) \leq D(G) + 1,$$

où $D(G)$ est le degré maximal d'un sommet de G.
18. Expliquer comment les nombres chromatiques $\chi(E, a)$ vus dans les sections précédentes peuvent être interprétés comme des nombres chromatiques de certains graphes bien choisis.