Exercices de Topologie

Thomas Blomme

3 octobre 2015

1 Distances

Exercice 1. *La Distance SNCF*. On définit la distance suivante sur $\mathbb{R}^2$, où l'on note $\| \bullet \|$ la distance euclidienne usuelle.

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| \text{ s'ils sont alignés avec } 0 \\ \|x\| + \|y\| \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que d est bien une distance sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner l'allure des voisinages d'un point.
3. Quelles sont les similitudes du plan qui sont continues ?
4. De même, montrer que la distance peigne est une distance

$$d'(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| \text{ s'ils sont alignés verticalement} \\ |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 2. *Les distances l^p*. On définit sur R^n la norme suivante, pour $p > 1$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

On désire montrer qu'elle induit une distance.

1. Montrer que $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$, et que $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$.
2. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire, appelée dans ce cas inégalité de Minkowski. On sépare en plusieurs points.
   (a) Montrer l'inégalité dite de Young.
   $$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$
   (b) En déduire l'inégalité dite de Hölder
   $$\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$
   Commencer par montrer qu'on peut se ramener au cas où les deux normes du membre de droite valent 1.
   (c) En finir avec l'inégalité de Minkowski :
   $$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$
3. Conclure.

Exercice 3. *Distance Produit*. Soient X et Y deux espaces métriques. Montrer que $d_X + d_Y$ est une distance sur $X \times Y$.

Exercice 4. *Distance ultramétrique*. On dit qu'une distance d est ultramétrique si l'on a l'inégalité dite ultramétrique :

$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z))$$

Montrer les faits étonnants suivants :

1. Si $d(x,y) \neq d(y,z)$, on a égalité dans l'inégalité.
2. Tout triangle est isocèle.
3. Tout point d'une boule ouverte en est le centre.
4. Deux boules sont disjointes ou l'une est incluse dans l'autre.

Montrer que l'ensemble des suites munie de la distance $d(u,v) = e^{-n}$ où n est le plus petit rang où les suites diffèrent est une distance ultramétrique.

2 Ouverts et Fermés

Exercice 5. Montrer qu'une intersection non finie d'ouverts peut ne pas être ouverte.

Exercice 6.
1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
2. A ferme si et seulement si $\overline{A} = A$
3. Quid des intérieurs ?
4. a-t-on $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \bar{(}B)$
5. a-t-on $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \bar{(}B)$
6. Quid des intérieurs ?

Exercice 7. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, quel est le nombre maximal de parties de $\mathbb{R}$ distinctes que l'on peut obtenir en prenant des intérieurs et des adhérences successives ?

3 Connexité

Exercice 8. *Connexité*. On dit qu'un espace topologique est connexe si les seules parties à la fois ouvertes est fermées sont $\emptyset$ et l'espace entier. Montrer l'équivalence avec "toute fonction continue vers $\{0,1\}$ est constante".

Exercice 9. Montrer que l'image par une fonction continue d'une partie connexe est connexe.

Exercice 10. Montrer que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les convexes. En déduire le TVI.

4 Topologie sur un ensemble

Exercice 11. *Topologie au départ*. Soit $f : X \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ une application, où Y est une espace topologique. On cherche à munir X d'une topologie qui rende f continue.

1. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{T}) := \{f^{-1}(U),\ U \in \mathcal{T}\}$ est une topologie qui convient.
2. Montrer qu'elle est minimale au sens où toute topologie sur X rendant f continue contient nécessairement $f^{-1}(\mathcal{T})$.

Exercice 12. *Topologie à l'arrivée*. On fait maintenant à l'envers. Soit $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow Y$ une application où seulement X est un espace topologique.

1. Montrer que dans le cas général, $f(\mathcal{T}) = \{f(U),\ U \in \mathcal{T}\}$ n'est pas une topologie.
2. On pose habilement $\mathcal{U} = \{V \subset Y$ tels que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$. Montrer que c'est une topologie sur Y qui rend f continue.
3. Montrer qu'elle est maximale au sens où toute topologie sur Y rendant f continue est incluse dans $\mathcal{U}$.

Exercice 13. *Topologie de Zariski*. On se place sur $\mathbb{R}^{\ltimes}$ et on note $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes en n variables.

1. Monter que les ensembles de la forme $V(T) = \{x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall P \in T\ P(x) = 0$ où T est une partie de A forment les fermés d'une topologie.
2. Identifier cette topologie lorsque $n = 1$.

5 Applications continues et Monstres

Exercice 14. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est-elle continue ? Et les fractions rationnelles ?

Exercice 15. *Vrai/Faux*. 1. La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

2. La somme d'une fonction continue et d'une discontinue est discontinue en ce point.
3. La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.
4. Reprendre avec le produit.

Exercice 16. *Fonction de Koebe*. On définit la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \wedge q = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Trouver les points où f est continue.

Exercice 17. Montrer qu'une application croissante a au plus un nombre dénombrable de discontinuités.

Exercice 18. Montrer qu'une fonction continue injective est monotone.

Exercice 19. *Sur la convergence des suites*. On munit $\overline{\mathbb{N}}$ de la topologie $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{[\![n; +\infty]\!]\}_{n \geqslant 0}$. Montrer qu'une suite (x_n) tend vers x_∞ si et seulement si l'application x définie sur $\overline{N}$ est continue.

Exercice 20. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(2x) = f(x)$. Montrer qu'elle est constante.

Exercice 21. Montrer que toute application lipschitzienne de rapport < 1 possède un unique point fixe.