Polynômes

Cyril Letrouit [*]

7 mai 2015

Quelques références utiles :
- Problem-solving strategies, A. Engel
- Cours de l'OFM
- Le site `http://www.artofproblemsolving.com/community/c13_contest_collections`, pour des énoncés d'olympiades du monde entier.

Les étoiles indiquent les exercices plus difficiles que les autres.

Exercice 1. *Soient x_1, x_2, x_3 les racines du polynôme $x^3 + 3x^2 - 7x + 1$. Calculer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.*

Exercice 2. *(a) Pour quels entiers n a-t-on $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$?*
(b) Pour quels entiers n est-ce que $37 \mid 1\underbrace{0...0}_{n}1\underbrace{0...0}_{n}1$?

Exercice 3. *Soit $P(x)$ un polynôme de degré n tel que $P(k) = k/(k+1)$ pour $k = 0, ..., n$. Calculer $P(n+1)$.*

Exercice 4. *Soient a, b, c trois entiers distincts et soit P un polynôme à coefficients entiers. Montrer qu'alors les trois conditions*

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a$$

ne peuvent être simultanément vérifiées.

Exercice 5. *[*] Trouver tous les réels solutions de l'équation*

$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$$

Exercice 6. *Quelle est la relation entre a, b, c si le système*

$$x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b, \quad x^3 + y^3 = c$$

a des solutions ?

Exercice 7. *Résoudre le système d'équations*

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

Exercice 8. *[*] Etant donnés $2n$ entiers distincts $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$, on remplit un tableau $n \times n$ comme suit : on écrit $a_i + b_j$ dans la case à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne. Montrer que si le produit de chaque colonne est le même, alors le produit de chaque ligne est aussi le même.*

[*] cyril.letrouit@ens.fr

Exercice 9. *Etant donnés un polynôme unitaire $f(x)$ de degré n sur $\mathbb{Z}$ et $k, p \in \mathbb{N}$, montrer que si aucun des nombres $f(k), f(k+1), ..., f(k+p)$ n'est divisible par $p+1$, alors $f(x) = 0$ n'a aucune solution rationnelle.*

Exercice 10. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ distincts. Montrer que le polynôme suivant est constant :*

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

Exercice 11. *Soit $f(x)$ un polynôme unitaire à coefficients entiers. S'il existe quatre entiers distincts a, b, c, d tels que $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$, montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, f(k) \neq 8$.*

Exercice 12. *Soit $p(x)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que s'il existe trois entiers a, b, c tels que $p(a) = p(b) = p(c) = -1$, alors $p(x)$ n'a pas de racine entière.*

Exercice 13. *[*] Montrer que si $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ sont distincts, alors $(x-a_1)...(x-a_n) - 1$ est irréductible.*

Exercice 14. *(OIM 1993, 1)[*] Soit $n > 1$ un entier et $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$. Montrer que $f(x)$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.*

Exercice 15. *[*] On suppose $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + 1$ où les a_i sont des réels ≥ 0, a n racines réelles. Montrer que $P(2) \geq 3^n$.*

Exercice 16. *(Théorème de Gauss-Lucas)[**] Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes. Alors tout zéro de P' appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des zéros de P.*

Exercice 17. *(OIM 2004, 2)[**] Déterminer tous les polynômes f à coefficients réels tels que, pour tous réels a, b, c vérifiant $ab + bc + ca = 0$, on ait*

$$f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) = 2f(a+b+c)$$

Exercice 18. *(OIM 1976, 2)[**] Soit $P_1(x) = x^2 - 2$ et $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$, pour $j = 2, 3, ...$ Démontrer que pour tout entier strictement positif n, les racines de l'équation $P_n(x) = x$ sont toutes réelles et distinctes.*

Exercice 19. *(OIM 1995, 6)[***] Soit p un nombre premier impair. Trouver le nombre de sous-ensembles $\mathcal{A}_0$ de l'ensemble $\{1, 2, ..., 2p\}$ tels que*

(i) $\mathcal{A}_0$ contient exactement p éléments ;

(ii) la somme des éléments de $\mathcal{A}_0$ est divisible par p.