Topologie

May 14, 2016

1 Continuité

Exercice 1 1) Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet une racine réelle.

2) Montrer que tout polynôme à coefficients réels unitaire dont le terme constant est négatif a une racine positive.

Exercice 2 1) Montrer que toute courbe fermée peut-être encadrée par un carré.

Exercice 3 Est-ce que $f(a) =$la plus grande racine de $x^3 - 3x + a = 0$ est continue ?

2 Figures homéomorphes

Exercice 4 1) Donner quelques objets homéomorphes à un cercle

2) Donner quelques objets homéomorphes à une sphère.

3) Classer les lettres de l'alphabet à homéomorphisme près.

Exercice 5 Donner quelques exemples d'invariants topologiques.

Exercice 6 Soit X une figure connexe. Un point $x \in X$ est dit séparant si lorsqu'on enlève à X tout voisinnage de x on obtient une figure non connexe. Le nombre de points séparants, ainsi que le nombre de points non séparants est un invariant topologique.

1) Donner un exemple de figure avec exactement n points séparants.

2) Donner un exemple de figure avec exactement n points non séparants.

Exercice Montrer qu'un méridian et qu'une parallèle d'un tore sont topologiquement équirépartis dans le tore.

3 Graphes

Exercice 7 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit homéomorphe à un cercle.

Remarque : on appelle contour un chemin d'un graphe qui est homéomorphe à un cercle.

Exercice 8 Soit $a_i(G)$ le nombre de sommets du graphe G de degré i.

1) Montrer que le nombre d'arêtes de G est égal à $\frac{1}{2}(a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + ...)$.

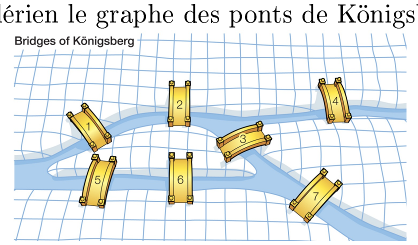
2) Montrer que le nombre de sommets d'indice impair est pair.

Exercice 9 Montrer qu'un graphe admet un contour si tout sommet est d'indice au moins 2.

Exercice 10 Un graphe est dit eulérien s'il existe un chemin qui passe par chaque arête une seule fois.

Montrer qu'un graphe est eulérien si et seulement si il a au plus deux sommets de degré impair.

Exercice 11 Montrer qu'il suffit de rajouter un pont d'importe où pour rendre eulérien le graphe des ponts de Königsberg.



Exercice 12 Quels graphes complets sont eulériens ?

Exercice 13 1) Montrer qu'on peut faire un parcours sur un graphe connexe qui passe par chaque arête exactement deux fois.

2) Démontrer le théorème de construction des graphes connexes : on peut construire un graphe connexe en mettant les arêtes les unes après les autres de sorte à avoir à chaque étape de la construction un graphe connexe.

Exercice 14 Dans un graphe connexe, entre deux sommets quelconques il existe un chemin homéomorphe à un segment.

Remarque : un tel chemin est appelé chaîne.

Exercice 15 Si, dans un graphe, entre deux sommets quelconques, il existe au moins deux chemins homéomorhes à un segment, alors le graphe n'a pas de sommet de degré 1. Réciproque ?

Exercice 16 Par définition, $\chi(G) = S - A$ où S est le nombre de sommets et A est le nombre d'arêtes.

1) Si G est une forêt, montrer que $\chi(G)$ est le nombre d'arbres de la forêt.

2) Si G a l composantes connexes, montrer que $\chi(G) \leq l$. Quand est-ce qu'on a égalité ?

Exercice 17 Si G est un graphe auquel on a rajouté des boucles, alors G a un unique arbre minimal. Réciproque ?

Exercice 18 Si G est un arbre, il existe une unique chaîne entre deux sommets quelconques. Réciproque si G connexe ?

Exercice 19 On associe à chaque arête d'un graphe un sens et un courant (c'est-à-dire un nombre positif). De plus, la loi de Kirchhoff est vérifiée : pour chaque sommet, la somme des courants entrants est égale à la somme des courants sortants.

1) Montrer que si G est un arbre, tous les courants sont nuls.

2) Soit G est un graphe connexe, et $r_1, ..., r_k$ sont les arêtes qu'on enlève pour obtenir un arbre minimal de G. Si on se donne une répartition des courants sur $r_1, ..., r_k$, alors on obtient une unique répartition des courants sur G qui vérifie la loi de Kirchhoff.

Exercice 20 On considère un graphe dont les arêtes sont les côtés et les plus petites diagonales d'un n-gone régulier. Montrer que si n est pair, le graphe est planaire et que si n est impair, le graphe n'est pas planaire.

Exercice 21 On considère un graphe dont les arêtes sont les côtés et les plus grandes diagonales d'un $2n$-gone régulier. Montrer que si $n \geq 3$, un tel graphe n'est pas planaire. Montrer qu'il est cependant torique.

Exercice 22 On considère un graphe dont les arêtes sont les côtés et les plus grandes diagonales d'un $2n+1$-gone régulier. Montrer que si $n \geq 2$, un tel graphe n'est pas planaire. Est-ce qu'il est torique ?

4 Lignes brisées du plan

On admettera que tous les réslutats qu'on démontre pour des lignes brisées du plan sont aussi valables pour des courbes quelconques.

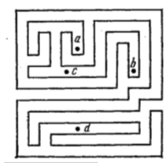
Exercice 24 Montrer que l'indice d'intersection de deux cycles du plan est nul. Ce résultat est-il vrai sur une sphère ? sur un tore ?

Exercice 25 Montrer que les graphes P_1 et P_2 ne sont pas planaires.

Exercice 26 Montrer que l'indice d'intersection de deux cycles entiers du plan est nul.

5 Théorème de Jordan

La notion d'intérieur et d'extérieur n'est pas toujours très clair.



On va démontrer le théorème de Jordan pour le cas d'une ligne brisée.

Exercice 27 Si une demi-droite issue d'un point intersecte la courbe en un nombre pair de points, alors le point est dans la région extérieur. Sinon, il est dans la région intérieure.

6 Notion de ligne

On utilise la notion de dimension introduite par Urysohn.

Exercice 28 Existe-t-il une ligne du plan qui est frontière de 20 régions à la fois ?

Exercice 29 Montrer qu'un graphe est de dimension 1.

Exercice 30 Montrer que la diagonale du carré sur lequel est construit le tapis de Serpinsky C intersecte C sur un ensemble de dimension 0. En déduire que C est de dimension 1.

Exercice 31 Montrer que "être de dimension 1" est un invariant topologique.

Remaeque : en fait, "être de dimension k" est un invariant topologique, mais il faut des outils de la topologie algébrique pour le prover.

7 Courbe de Péano

Exercice 32 Existe-t-il un analogue de la courbe de Péano pour un cube ?

Exercice 33 Montrer qu'il y a des points du carré par lesquels la courbe de Péano passe exactement 4 fois, mais qu'il n'y en a pas par lesquels la courbe de Péano passe 5 fois.