Inégalités

Mehdi Trense

16 janvier 2016

I. Quelques inégalités classiques à connaître

II. Quelques idées utiles

— Ne pas sous-estimer IAG.
— Si l'inégalité est homogène, on peut introduire une contrainte $abc = 1$ ou $a + b + c = 1$ par exemple.
— Si l'inégalité est symétrique, on peut tout exprimer en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
— Chercher quels sont les cas d'égalité. Si l'égalité a lieu au bord ou lorsque tous les termes sont égaux, essayer de faire de redistributions.
— Si l'expression est convexe en chacune des variables, le maximum est atteint au bord.
— Introduire des variables petites et positives.
— Si on parle d'un triangle, penser à la philosophie x, y, z.

III. Exercices

1. Soient $x_1, ..., x_n > 0$ tels que $\frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = n$, déterminer la plus petite valeur de la somme
$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + ... + \frac{x_n^n}{n}$$
2. Soient $x_1, ..., x_n \geq 1$. Montrer que
$$\sum_{cyc} \frac{1}{1+x_1} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}}$$
3. $a, b, c > 0$ avec $a^2 < bc$. Montrer que
$$b^3 + ac^2 > ab(a + c)$$
4. $a_1, ..., a_n > 0$. Montrer que
$$(1 + \frac{a_1^2}{a_2})(1 + \frac{a_2^2}{a_3})...(1 + \frac{a_n^2}{a_1}) \geq (1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n)$$
5. (IMO 95/2) $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$. Montrer que
$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}$$
6. $a, b, c > 0$ tels que $ab + bc + ac \geq \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Montrer que
$$a + b + c \geq \sqrt{3}$$
7. $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ab + bc + ac \geq 0$. Montrer que
$$\sum_{cyc} \frac{ab}{a^2+b^2} \geq -\frac{1}{2}$$
8. $x_1, ..., x_n \in [1; 2]$. Montrer que
$$(\sum_{k=1}^n x_k)(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k})^2 \leq n^3$$
9. $a, b, c > 0$. Montrer que
$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} \geq 4$$
10. (BMO 2015/1) $a, b, c \geq 0$. Montrer que
$$a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3a^3b^3c^3 \geq abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + a^2b^2c^2(a^3 + b^3 + c^3)$$

11. (IMO 2001/2) $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1$$

12. $x, y, z > 0$ tels que $xyz = x + y + z$. Montrer que

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{3}{4}$$

13. $a, b, c > 0$ tels que $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = 1$. Montrer que

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

14. Montrer que si a, b, c sont les côtés d'un triangle, on a l'inégalité suivante :

$$\sum_{cyc} a(b^2 + c^2 - a^2) \leq 3abc$$

15. $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n \geq 0$ tels que $\sum_{cyc} \frac{1}{1+x_1} = 1$. Montrer que

$$x_1 x_2 ... x_n \geq (n-1)^n$$

16. $a, b, c, d \geq 0$ tels que $a + b + c + d = 4$. Montrer que

$$9(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 16 + 2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$$

17. (BMO 2012/2) $x, y, z \geq 0$. Montrer que

$$\sum_{cyc} (x + y)\sqrt{(y + z)(z + x)} \geq 4(xy + yz + zx)$$

18. (BMO 2006/1) $a, b, c \geq 0$. Montrer que

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a(b+1)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

19. $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} \geq 2$$

20. $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq 2$$

21. $a, b, c > 0$. Montrer que

$$(a + b + c)^3 (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq 27(abc)^2$$

22. (IMO 1961/2) Soit a, b, c les côtés d'un triangle et S son aire. Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

23. (USAMO 80/5) $0 \leq a, b, c \leq 1$. Montrer que

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 1$$

24. (USAMO 77/5) $0 < p \leq a, b, c, d, e \leqq q$. Montrer que

$$(a + b + c + d + e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right) \leq 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

25. (IMO 2012/2) $0 \leq a_2, ..., a_n$ tels que $a_2 a_3 ... a_n = 1$. Montrer que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 ... (1 + a_n)^n \geq n^n$$

26. (IMO 1983/3) Soit a, b, c les côtés d'un triange. Montrer que

$$a^2 b(a - b) + b^2 c(b - c) + c^2 a(c - a) \geq 0$$

27. (IMO 1992/5) Soit S un ensemble fini de points de l'espace $\mathbb{R}^3$. Soit S_x, S_y, S_z les ensembles des projections orthogonales de S sur les plans yOz, zOx, xOy respectivement. Montrer que

$$|S|^2 \leq |S_x|.|S_y|.|S_z|$$