Fonctions génératrices

Pablo Bustillo Vazquez

Introduction

1 Définitions

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle **fonction génératrice** de la suite u, la série formelle

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

A notre niveau, on considèrera les fonctions génératrices comme des objets algébriques, formels et rarement comme des fonctions analytiques. Les fonctions génératrices jouent un rôle fondamental en analyse combinatoire. Elles permettent de dénombrer les objets de "même taille" d'une classe, d'obtenir des formules explicites à partir de formules récursives et d'obtenir de nouvelles formules récursives. A plus haut niveau, elles peuvent aussi par exemple permettre d'obtenir le comportement "à l'infini" d'une suite.

Plus précisément, une classe $\mathcal{A}$ est une famille finie ou infinie d'éléments. On lui associe une fonction "taille" $|\cdot| : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$. Pour calculer le nombre a_n d'éléments de taille n il suffit alors de calculer le coefficient devant x^n de

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} x^{|a|} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Or une fonction génératrice peut alors être facilement calculée et simplifiée via sa **forme simplifiée** à différencier de sa **forme développée**.

Exemple 1.1. Si on regarde la suite constante égale à 1, la forme développée de sa fonction génératrice est

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$$

Alors que la forme simplifiée est

$$F(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Regardons quelques exemples.

Trouver les formes simplifiées des fonctions génératrices des suites suivantes :

1. $\binom{2016}{0}, \binom{2016}{1}, \dots, \binom{2016}{2016}, 0, 0, \dots$
2. $1, 2, 4, 8, 16, \dots$
3. $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Trouver le coefficient devant x^{2016} dans :

1. $\frac{x}{1-5x}$
2. $\frac{1}{(1+x)^2}$
3. $\frac{1}{1+x+x^2}$

Remarque 1.1. On veillera à conserver des notations homogènes : une suite a_n sera associée à une fonction génératrice $A(x)$ et une classe $\mathcal{A}$.

Notation 1.1. On se donne une **extractrice** de coefficient : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, $F(x)$ sa fonction génératrice. Alors on note

$$[x^n]\,(F(x)) = [x^n]\left(\sum_{n\geq 0} f_n x^n\right) = f_n$$

le $(n+1)$-ième coefficient de $F(x)$, ie le coefficient de degré n.

Exemple 1.2. Quelques exemples d'utilisation en combinatoire :

1. Distribuez 30 souvenirs à 42 touristes, chaque touriste pouvant recevoir plus d'un souvenir. Combien y-a-t-il de possibilités ?
2. Combien y-a-t-il de solutions à $a+b+c=6$ avec $-1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b, c \leq 4$?

2 Hall of Fame

Pour reconnaître des séries compliquées et pour s'aider dans les calculs et interprétations combiantoires, il est toujours bon de connaître ses classiques :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots &&= \sum_{n\geq 0} x^n \\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots &&= \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n \\
-\ln(1-x) &= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots &&= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n} \\
\mathrm{e}^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\cdots &&= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\cdots &&= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\cdots &&= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
\sinh(x) &= x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}+\cdots &&= \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cosh(x) &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+\cdots &&= \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
(1+x)^r &= 1+rx+\frac{r(r-1)}{2}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{6}x^3+\cdots &&= \sum_{n\geq 0} \binom{r}{n} x^n \\
\frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= 1+2x+6x^2+20x^3+70x^4+252x^5+\cdots &&= \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n \\
\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} &= 1+x+2x^2+5x^3+14x^4+42x^5+\cdots &&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n \\
\frac{1}{(1-x)^{r+1}} &= 1+\binom{r+1}{1}x+\binom{r+2}{2}x^2+\cdots &&= \sum_{n\geq 0} \binom{r+n}{n} x^n \\
\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} &= \binom{n}{n}x^n+\binom{n+1}{n}x^{n+1}+\binom{n+2}{n}x^{n+2}+\cdots &&= \sum_{k\geq 0} \binom{k}{n} x^k
\end{aligned}$$

avec la notation polynômiale suivante :

Notation 2.1. Pour tout $r \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}$$

avec la convention $\binom{r}{0} = 1$.

Cette notation permet d'étendre la formule de Newton aux réels. On a alors ces quelques résultats qui permettent de s'y retrouver :

Proposition 2.1. *Pour tout $r \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a alors*

$$\binom{-r}{n} = (-1)^n \binom{n+r-1}{n} \tag{2.1}$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}2^{-2n}}{2n-1}\binom{2n}{n} \tag{2.2}$$

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n 2^{-2n}\binom{2n}{n} \tag{2.3}$$

Et on a toujours pour $r \in \mathbb{Z}$, $\binom{r}{n} = 0$ si $r < n$.

On retrouve alors bien les développements de $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$, $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, $\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$, $\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$, $\frac{1}{1-x}$ et même $\frac{1}{1+x}$ via ces formules et la formule de Newton généralisée. Mais il est tout de même intéressant de bien les connaître car ils peuvent souvent apparaître.

3 Opérations élémentaires

De manière générale, il est délicat de justifier proprement certains arguments analytiques sur les fonctions génératrices (que l'on puisse les dériver, les intégrer, ...). Mais sous certaines conditions que la fonction est suffisement "régulière", on peut à peu près faire tout ce qu'on veut... On ne cherchera pas ici à justifier ce genre de manipulations. On essayera plutôt de gagner de l'instinct sur l'intérêt de telles opérations et d'apprendre à les utiliser dans une optique plus formelle et combinatoire qu'analytique.
Soit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux classes d'éléments (disjointes). Imaginons que l'on cherche le nombre d'élément de taille n dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ réunis : on cherche alors à comprendre la structure

$$\mathcal{A} + \mathcal{B}$$

Cela se fait naturellement en sommant leurs fonctions génératrices :

$$A(x) + B(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n.$$

Le produit cartésien des classes se fait aussi naturellement. On cherche le nombre de couples $(a, b) \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ tels que $|a| + |b| = n$. Il suffit alors de multiplier les fonctions génératrices :

$$\begin{aligned}
A(x)\cdot B(x) &= \left(\sum_{a\in\mathcal{A}} x^{|a|}\right)\cdot\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} x^{|b|}\right)\\
&= \sum_{(a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} x^{|a|+|b|}\\
&= \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right)\\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n
\end{aligned}$$

(Produit de Cauchy)

Une série d'**astuces calculatoires** permet des opérations plus compliquées tout en se traduisant facilement sur les coefficients :

3.1 Dérivée

$$A'(x) = \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}.$$

On retrouve bien avec cette formule les relations classiques : $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sinh x)' = \cosh x$ et $(\cosh x)' = \sinh x$.

3.2 Primitive

$$\int_0^x A(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right) dt = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

On retrouve bien le développement de $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ en intégrant $\frac{1}{1-x}$.

3.3 Dérivée décalée

Notation 3.1. On note $xDA(x) = xA'(x) = \sum_{n\geq 1} na_n x^n$. Cette fonction permet d'obtenir la *"somme" des tailles* des éléments.

Cet opérateur est généralement plus intéressant que la simple dérivée. On a en particulier :

Proposition 3.1. *Soit P un polynôme. Alors,*

$$P(xD)A(x) = \sum_{n\geq 0} P(n)a_n x^n.$$

3.4 Changement de variable linéaire

$$A(\alpha x) = \sum_{n\geq 0} a_n \alpha^n x^n.$$

On dispose aussi d'une série d'**astuces combinatoires** permettant de faire apparaître un certain objet construit sur base des objets de la classe $\mathcal{A}$.

3.5 Multiplication par $\frac{1}{1-x}$

Pour calculer le nombre d'éléments de taille $\leq n$:

$$\frac{A(x)}{1-x} = \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n$$

Et pour les plus courageux :

3.6 Suite d'une certaine "taille"

Si maintenant on a une classe $\mathcal{A}$ d'éléments et qu'on veut trouver le nombre de suites de tels éléments d'une certaine taille : on cherche les $a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(k)} \in \mathcal{A}$ tels que $\left|a^{(1)}\right| + \left|a^{(2)}\right| + \cdots + \left|a^{(k)}\right| = n$. On cherche donc à trouver une formule combinatoire pour

$$SEQ(\mathcal{A}) = \epsilon + \mathcal{A} + (\mathcal{A}\times\mathcal{A}) + (\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{A}) + \cdots$$

Il suffit de calculer :

$$\frac{1}{1-A(x)} = \underbrace{1}_{\text{suite de taille 0}} + \underbrace{A(x)}_{\text{suite de taille 1}} + A(x)^2 + \cdots + \underbrace{A(x)^n}_{\text{suite de taille n}} + \cdots$$

3.7 Ensembles d'une certaine "taille"

On veut réaliser à peu près la même chose que pour les suites mais modulo l'ordre : on veut que deux suites composées des mêmes éléments dans des ordres différents soient intrinséquement les mêmes "ensembles". On cherche à comprendre la structure

$$MSET(\mathcal{A}) = SEQ(\mathcal{A})/\mathbf{R}$$

où $\mathbf{R}$ est la relation d'équivalence entre deux suites dans des ordres différents.
Il suffit de calculer

$$\prod_{n\geq 0}\prod_{|a|=n} \underbrace{\left(\frac{1}{1-x^n}\right)}_{\text{choix du nombre de } a \text{ pris}} = \prod_{n\geq 0}\left(\frac{1}{1-x^n}\right)^{a_n} = \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}A(x^k)\right)$$

3.8 Sous-ensembles d'une certaine "taille"

On cherche maintenant des sous-ensemble de $\mathcal{A}$ d'une taille donnée. On a donc pour tout élément le choix de le prendre ou non. On cherche à comprendre la structure $PSET(\mathcal{A})$.
Il suffit de calculer

$$\prod_{n\geq 0}\prod_{|a|=n}\underbrace{(1+x^n)}_{\text{choix de prendre } a} = \prod_{n\geq 0}(1+x^n)^{a_n} = \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}A(x^k)\right)$$

D'autres formules permettent encore de trouver par exemple le **nombre de cycles** d'éléments de $\mathcal{A}$, ie le nombres de suites non vides modulo une permutation circulaire des éléments de la suite.

4 Méthode générale

Les fonctions génératrices s'utilisent généralement de la même manière :

On cherche à trouver une certaine quantité u_n dépendant d'un entier n. On obtient une formule récursive qui donne u_n en fonction des termes précédents. On multiplie cette formule des deux côtés par x^n et on somme sur n. On obtient une équation pour $U(x)$, on la résoud et on retrouve en développant le terme devant x^n, ie u_n.

On pourra voir, pour illustrer cette méthode, l'exemple des suites récursives linéaires comme F_n ou l'exemple des nombres de Catalan (voir exercices).

On peut aussi passer directement à l'obtention de la forme simplifiée de $U(x)$ si on a assez d'instinct sur l'usage des fonctions génératrices et sur leur traduction en termes de structures combinatoires. C'est généralement ainsi qu'on utilisera les fonctions génératrices exponentielles.

Une dernière méthode intéressante est la méthode du **Snake Oil** ("le remède de charlatan"). Il s'agit de considérer une grandeur u_n dépendant encore de n mais cette fois-ci définie comme une somme avec n comme variable. On multiplie encore par x^n et on somme sur n. On obtient une double somme : une série dont les termes sont des sommes. On **permutte les sommes** et on retrouve alors une expression simplifiée des termes de notre nouvelle série formelle. Ainsi on trouve l'expression de $U(x)$, et en développant, celle de u_n.

Cette dernière méthode est très pratique pour prouver des relations de sommes sur les coefficients binomiaux en particulier.

Exemple 4.1. Calculons

$$\sum_{k=n}^{m}\binom{m}{k}\binom{k}{n}.$$

On décide de fixer m et on pose $u_n = \sum_{k=n}^{m}\binom{m}{k}\binom{k}{n}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
U(x) &= \sum_{n\geq 0} u_n x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=n}^{m}\binom{m}{k}\binom{k}{n}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{k}\binom{m}{k}\binom{k}{n}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(1+x)^k \\
&= (2+x)^m
\end{aligned}$$

D'où on trouve tout simplement :

$$u_n = \binom{m}{n}2^{m-n}.$$

5 Propriétés intéressantes

5.1 Limite et dérivée

On a une série de propriétés (qu'on admettra pour la plupart) qui peuvent nous aider à manipuler cet objet. La plus connue est probablement la formule de Taylor qui permet, sous certaines conditions de régularité, d'obtenir le développement d'une fonction quelconque :

Proposition 5.1. ***(Taylor)*** *Soit f une fonction, alors, sous certaines conditons, on peut trouver le développement de f par :*

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

En particulier, on peut en théorie calculer le n-ième coefficient d'une suite dont on connait la fonction génératrice par :

$$[x^n]\, U(x) = \frac{U^{(n)}(0)}{n!}.$$

On a aussi tout naturellement la proposition suivante pour calculer la somme de tous les termes d'une suite :

Proposition 5.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, $U(x)$ sa fonction génératrice. Alors, sous certaines conditions de régularité et si U admet une limite en 1,*

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \lim_{x\to 1} U(x).$$

On pourra aussi s'intéresser à la limite des coefficients d'une fonction génératrice. On a alors le résultat suivant :

Proposition 5.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, $U(x)$ sa fonction génératrice. Alors, sous certaines conditions de régularité,*

$$u_n \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{x\to 1}(1-x)U(x).$$

Démonstration. On note $F(x)$ la fonction génératrice définie par

$$\begin{aligned} F(x) &= (1-x)U(x) \\ &= u_0 + (u_1 - u_0)x + (u_2 - u_1)x^2 + \cdots + (u_n - u_{n-1})x^n + \cdots \\ &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_n x^n + \cdots \end{aligned}$$

et on définit sa valeur en 1 par $\lambda = \lim_{x\to 1}(1-x)U(x)$. Alors on comprends que

$$u_n = [x^n]\left(\frac{F(x)}{1-x}\right) = [x^n]\left(F(x)\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{x\to 1} F(x) = \lambda.$$

□

5.2 Décomposition en éléments simples

Il arrive aussi souvent qu'on ait des expressions sous formes de fractions rationnelles pour les fonctions génératrices. Pour calculer les coefficients, on peut alors se ramener au cas précédent par **décomposition en éléments simples** :

Exemple 5.1. De combien de manière peut-on partitionner n en somme de 1 et de 2, sans prendre en compte l'ordre ?

Il suffit de choisir le nombre a de 1 et le nombre b de 2 intervenant dans l'écriture. On a alors $a+2b=n$: les 1 ont un "poids" de 1 et les 2 ont un "poids" de 2. Ainsi le coefficient devant x^n de

$$\begin{aligned}
\underbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)}_{x^i \text{ représente le cas où } x^i}\underbrace{(1+x^2+x^4+x^6+x^8\cdots)}_{x^{2j} \text{ représente le cas où } b=j} &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2} \\
&= \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)}-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)} \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{(-1)^n}{4}\right)x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)x^n
\end{aligned}$$

D'où la réponse est toujours $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$.

5.3 Fonction génératrice exponentielle

En combinatoire, on a souvent des factorielles dans tous les sens. Il est souvent utile de définir un autre type de fonction génératrice : la fonction génératrice exponentielle d'une suite.

Définition 5.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle **fonction génératrice exponentielle** de la suite u, la série formelle

$$U(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\frac{x^n}{n!}.$$

Ainsi e^x est la fonction génératrice exponentielle de la suite constante égale à 1. Ou encore, f est la fonction génératrice exponentielle de la suite $(f^{(n)}(0))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 5.2. On a alors par exemple que $(e^x)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)^2$ compte le nombre de manières de séparer $\{1,\cdots,n\}$ en deux sous-ensembles disjoints (c'est la fonction génératrice exponentielle de cette valeur). En effet,

$$[x^n]\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)^2=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}=\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}{n!}$$

Et on retrouve bien le résultat connu que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ car

$$(e^x)^2=e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n!}$$

Remarque 5.1. Alors que pour une fonction génératrice classique, les coefficients sont généralement des entiers (car ils comptent un certain objet combinatoire), ici les coefficients seront plus souvent des rationnels.

Proposition 5.4. *Soit $U(x)$ la fonction génératrice exponentielle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors*

$$U^{(h)}(x)=\sum_{n\geq 0}u_{n+h}\frac{x^n}{n!}$$

est la fonction génératrice exponentielle de $u_h, u_{h+1}, u_{h+2}, uh+3,\ldots$

Proposition 5.5. *On a encore pour P un polynôme,*

$$P(xD)U=\sum_{n\geq 0}P(n)u_n\frac{x^n}{n!}.$$

Proposition 5.6. *Soit $A(x)$ et $B(x)$ les fonctions génératrices exponentielles des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors on a,*

$$A(x)B(x)=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}\frac{x^n}{n!}.$$

5.4 Racines de l'unité

Une dernière idée bien pratique est celle d'utiliser les racines de l'unités pour *trier* les termes de la suite.

Proposition 5.7. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite,* $U(x)$ *sa fonction génératrice et* $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2il\pi}{m}}$ *pour un certain* $0 < l < m$*. Alors,*

$$u_0 + u_m + u_{2m} + u_{3m} + \cdots = \frac{U(\omega) + U(\omega^2) + \cdots + U(\omega^m)}{m}.$$

Et plus généralement, pour tout $0 \leq k < n$*,*

$$u_k + u_{m+k} + u_{2m+k} + u_{3m+k} + \cdots = \frac{\omega^{-k}U(\omega) + \omega^{-2k}U(\omega^2) + \cdots + \omega^{-mk}U(\omega^m)}{m}.$$

Exercices

La sélection d'exercices est très vaste et relativement exhaustive. Il n'est évidement pas réalisable de finir tous les exercices. Mais j'ai trouvé pertinent de réunir une série de problèmes du très simple au plus astucieux pour ceux qui veulent se pencher d'un peu plus près sur cette méthode combinatoire. En olympiades, il est relativement rare de pouvoir utiliser cet objet mais tout de même, encore jusqu'en 2005 à l'IMO, des problèmes très compliqués ont pu se résoudre en quelques lignes grâce aux fonctions génératrices... Ça fait rêver.

6 Un peu de calcul..

1. **(Vandermonde)** Montrer qu'on a

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

   Déduisez-en la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

2. Montrer que
   (a) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\binom{m}{k} = n\binom{n+m-1}{n}$
   (b) $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^p\binom{n}{p}$
3. Donner une formule explicite pour
   (a) $\sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{m} x^n$ où m est un entier positif.
   (b) $\sum_{k\geq 0} n^2 x^n$
   (c) $\sum_{k\geq 0} F_n x^n$ où F_n est le n-ième terme de la suite de Fibonacci.
4. Montrer à l'aide de l'exercice précédent les formules suivantes
   (a) Pour tout $n \geq 0$, $F_0 + F_1 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$
   (b) Pour tout $n \geq 1$, $F_1 + F_3 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$
   (b) Pour tout $n \geq 1$, $F_0 + F_2 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
5. Montrer qu'on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n.$$

6. Trouver la fonction génératrice de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$ et $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$ pour tout $n \geq 1$. Déduisez-en une formule explicite pour les termes de la suite.
7. ( ) Calculer :
   (a)

$$\sum_{k\geq 0} \binom{k}{n-k}$$

(b)

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor}x^k$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k}=\binom{4n}{2n}$$

7 Quelques classiques

1. **(Newton)** Un polynôme en n variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est dit symétrique si, pour chaque permutation $\sigma \in S_n$, on a
$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$
On considère plusieurs classes de polynômes symétriques homogènes. La première classe - les polynômes symétriques élémentaires - est celle des polyômes de la forme,
$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} x_{i_1}\cdot\cdots\cdot x_{i_k}$$
pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\sigma_0 = 1$, et $\sigma_k = 0$ pour $k > n$. Une autre classe de polynômes symétriques - les polynômes homogènes complets - est donnée par,
$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} x_1^{i_1}\cdot\cdots\cdot x_n^{i_n}, \qquad \text{où } i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N}_0.$$
La troisième classe est celle des sommes de Newton :
$$s_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + \cdots + x_n^k.$$
Prouver les relations polynomiales suivantes :
$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\sigma_r p_{n-r} = 0$$
$$np_n = \sum_{r=1}^{n} s_r p_{n-r}$$
$$n\sigma_n = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}s_r\sigma_{n-r}$$

2. **(Stirling)** On note $S(n, k)$ le nombre de Stirling de seconde espèce, ie le nombre de façons de répartir n éléments en k sous-ensembles (ou classes). Voici par exemple toutes les partitions de 4 éléments en deux classes :
$$\begin{aligned}\{1,2,3,4\} &= \{1,2\}\sqcup\{3,4\}\\ &= \{1,3\}\sqcup\{2,4\}\\ &= \{1,4\}\sqcup\{2,3\}\\ &= \{1,2,3\}\sqcup\{4\}\\ &= \{1,2,4\}\sqcup\{3\}\\ &= \{1,3,4\}\sqcup\{2\}\\ &= \{2,3,4\}\sqcup\{1\}.\end{aligned}$$
Ainsi $S(4, 2) = 7$. On pose par ailleurs $S(0, 0) = 1$ et $S(n, 0) = 0$ pour $n > 0$ et $S(n, k) = 0$ pour $0 \leq n < k$.
   (a) Montrer que, pour $k > 0$,
$$\sum_{n\geq 0} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

(b) Montrer que pour tout $n \geq k \geq 0$, on a

$$S(n,k) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}.$$

On peut aussi montrer que la fonction génératrice exponentielle de $(S(n,k))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\frac{1}{k!}(\mathrm{e}^x - 1)^k$.

3. **(Bell)** Soit B_n le nombre de partitions de $\{1, \cdots, n\}$, ie $\sum_{k\geq 1} S(n,k)$. On l'appelle n-ième nombre de Bell. Par convention, $B_0 = 1$ et on peut calculer $B_1 = 1$, $B_2 = 2$ et $B_3 = 5$. Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Trouver l'expression de la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Bell :

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire par identification des coefficients une formule explicite pour B_n sous forme d'une somme infinie.

4. **(Catalan)** Les nombres de Catalan C_n, satisfont $C_0 = 1$ et

$$C_n = C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + C_{n-3}C_2 + \cdots + C_0C_{n-1}$$

pour tout $n \geq 1$. Trouver la fonction génératrice de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire une formule explicite pour C_n.

5. Soit $p(n)$ le nombre de partitions de n. Trouver la fonction génératrice de $p(n)$.
6. **(Euler)** Soit n un entier positif. Soit a_n le nombre de partitions de n sous forme de somme d'entiers impairs. Soit b_n le nombre de partitions de n sous forme de somme d'entiers distincts. Montrer que $a_n = b_n$.
7. **( )** Trouver le nombre de permutations sans point fixe de $\{1, \cdots, n\}$. On peut comprendre un point fixe comme un 1-cycle. Ainsi il est aussi intéressant de chercher le nombre de permutations sans 1-cycle ni 2-cycle. Ou plus généralement : Pour un k fixé, quel est le nombre de permutations de $\{1, \cdots, n\}$ sans i-cycle pour $i \leq k$? Quelle est la proportion de ces permutations quand $n \to \infty$?

8 Problèmes de type olympiade

1. **(Putnam 1957)** Soit $\alpha(n)$ le nombre d'écritures de n comme somme de 1 et de 2, en prenant en compte l'ordre. Par exemple, puisque

$$4 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 1+1+1+1$$

on a $\alpha(4) = 5$. Soit $\beta(n)$ le nombre d'écritures de n comme somme d'entiers strictement plus grands que 1, en prenant en compte l'ordre. Par exemple, puisque

$$6 = 4+2 = 2+4 = 3+3 = 2+2+2$$

on a $\beta(6) = 5$. Montrer que $\alpha(n) = \beta(n+2)$.

2. **(IMO Shortlist 1998)** Soit $a_0, a_1, a_2, \cdots$ une suite croissante d'entiers positifs telle que chaque entier positif puissent s'écrire de manière unique comme $a_i + 2a_j + 4a_k$, avec i, j, k pas nécésairement distincts. Trouver a_{1998}.
3. Soit n un entier positif. Trouver le nombre de polynômes $P(X)$ à coefficients dans $\{0, 1, 2, 3\}$ tels que $P(2) = n$.
4. Supposons que l'on ait une partition de $\mathbb{N}^*$ en suites arithmétiques $\{a_i + nd_i, n \in \mathbb{N}\}$, pour $i = 1, 2, \cdots, k$.

   (a) Montrer que $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_k} = 1$.

   (b) Montrer que $\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \cdots + \frac{a_k}{d_k} = \frac{k+1}{2}$.

(c) Montrer que $d_i = d_j$ pour certains $i \neq j$.

5. Un rectangle $a \times b$ peut être pavé par des rectangles de taille $p \times 1$ ou $1 \times q$ où a, b, p, q sont fixes. Montrer que $p|a$ ou $q|b$. (Un rectangle $1 \times x$ est considéré différent d'un rectangle $x \times 1$ pour $x \neq 1$.)
6. **(IMO5 2008)** Soient n et k des entiers strictement positifs tels que $k > n$ et $k - n$ est pair. On suppose données $2n$ lampes numérotées de 1 à $2n$; chacune peut être allumée ou éteinte. Au début, toutes les lampes sont éteintes. Une opération consiste à allumer une lampe éteinte ou bien à éteindre une lampe allumée. On considère des séquences constituées d'opérations successives.
Soit N le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n+1$ à $2n$ sont éteintes.
Soit M le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n+1$ à $2n$ sont éteintes, mais où les lampes de $n+1$ à $2n$ n'ont jamais été allumées.
Déterminer le rapport N/M.
7. **(IMO6 1995)** Soit p un nombre premier impair. Trouver le nombre de sous-ensemble A de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, 2p\}$ telles que
   (i) $|A| = p$,
   (ii) la somme des éléments de A est un multiple de p.
8. **(IMO Shortlist 1999)** Soit $p > 3$ un nombre premier. Pour tout ensemble non vide T de $\{1, 2, \cdots, p-1\}$, on désigne par $E(T)$ l'ensemble de tous les $(p-1)$-uples $(x_1, x_2, \cdots, x_{p-1})$ tels que :
   (i) $x_i \in T$ pour tout $1 \leq i \leq p-1$,
   (ii) la somme $x_1 + 2x_2 + \cdots + (p-1)x_{p-1}$ est divisible par p.

   Prouver que $E(\{0, 1, 3\})$ contient au moins autant d'éléments que $E(\{0, 1, 2\})$. Ces deux ensembles ont le même nombre d'éléments si, et seulement si, $p = 5$.

9 Un marcheur perdu

1. Le plan est divisé en carrés de côté 1 par des lignes parallèles aux axes orthogonaux du système de coordonnées. Trouver le nombre de chemins de taille n allant de $(0, 0)$ à (a, b) passant par les côtés des carrés.
2. Un marcheur se déplaçant sur $\mathbb{N}$ est à 0 au temps 0 et à 1 au temps 1. S'il est à k au temps $n \geq 1$, alors soit $k = 0$ et il ne se déplace pas au temps $n+1$, ou $k \geq 1$ et il se déplace alors équiprobablement d'un pas sur la gauche ou d'un pas sur la droite. On appelle P_n^k la probabilité que le marcheur soit à k au temps n, et on pose $P_k(z) = \sum_{n \geq 0} P_n^k z^n$ la fonction génératrice de la suite $(P_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$. Prouver que :
   (i) $P_0(z) = 1 + \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}$,
   (i) $P_k(z) = 2\left(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\right)^k$ pour tout $k \geq 1$.

   Montrer ensuite que le temps estimé de sa promenade, $\sum_{n \geq 1} n \left(P_0^n - P_0^{n-1}\right)$, est infini.
3. **(Fonction de Green)** On peut considérer le cas plus général où un marcheur se déplace sur un *graphe régulier connexe* (chaque sommet a le même nombre de voisins et on peut relier n'importe quels deux sommets par un chemin) auquel on associe une racine de laquelle part le marcheur au temps $n = 0$. A chaque instant, il passe équiprobablement à l'un de ses voisins. Pour $k \geq 0$, on appelle
   (i) N_k le nombre de chemins de taille k partant de la racine,
   (i) U_k le nombre de chemins de taille k partant de et finissant à la racine,
   (i) V_k le nombre de chemins de taille k partant de et finissant à la racine, et ne la visitant pas entre temps.

   Soit $u_k = U_k/N_k$ et $f_k = V_k/N_k$ avec la convention $u_0 = 1$ et $f_0 = 0$. On définit la *fonction de Green* $G(x)$ comme la fonction génératrice de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on introduit $F(x)$ la fonction génératrice de la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que $G(x) = \frac{1}{1-F(x)}$.

(b) Pour $\mathbb{Z}$, vérifier que $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Déduisez-en u_k et f_k.

(c) Avec P_0 défini comme précédement, montrer que $P_0 = 1 + \frac{1}{1-x} \sum_{n\geq 1} f_{2n} x^{2n}$. Déduisez-en f_k et vérfier la concordance des résultats.

(d) Pour $\mathbb{Z}^2$, vérifier que $G(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2 x^{2n}$.

On prend maintenant un *arbre régulier* de degré $d \geq 2$. Montrer succesivement que

$$f_{2n} = \frac{1}{d^{2n}} d(d-1)^{n-1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \tag{9.1}$$

$$F(x) = \frac{d}{2(d-1)} \left[1 - \sqrt{1 - 4\frac{d-1}{d^2} x^2} \right] \tag{9.2}$$

$$G(x) = \frac{2(d-1)}{d^2 + \sqrt{d^2 - 4(d-1)x^2}} \tag{9.3}$$

10 Bonus

Montrer que, dans le calendrier grégorien, le 13$^{\text{ème}}$ du mois à plus de chance d'être un vendredi...

11 Beaucoup de bonus

Plus de bonus pour plus de fun : la Bible des fonctions génératrices : *Analytic Combinatorics*, de Flajolet et Sedgewick (810 pages...). Ou encore : *Concrete Mathematics*, de Graham Knuth et Patashnik.