Exercices sur les graphes

Simon Machado

November 6, 2015

Exercice 1:

1. Existe-t-il un graphe simple ayant 3 sommets tous de degré 3?
2. Montrer que le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair.
3. Montrer que dans un graphe simple il existe toujours deux sommets ayant le même degré.
4. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient que des cycles de longueur paire.

Exercice 2: Soit ABC un triangle, et $P_1...P_n$ un ensemble de points à l'intérieur du triangle (potentiellement sur l'un des côtés). A l'intérieur du triangle on trace des arêtes entre les points $A, B, C, P_1...P_n$ de telle sorte que toute face délimitée par ces arêtes soit un triangle. On se donne alors la coloration suivante: A est en rouge, B est en bleu et C en vert; on suppose de plus que si $P_i \in [A, B]$ alors il est colorié en rouge ou en bleu (de même s'il est dans $[B, C]$ ou $[C, A]$ il est de la couleur d'une des extrémités); enfin, les autres points peuvent avoir n'importe quelle des trois couleurs. Montrer qu'il existe un triangle intérieur qui ait ses trois sommets de couleurs distinctes.

Exercice 3: Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Montrer l'équivalence entre les deux définitions d'arbre suivantes:

- G est un arbre s'il est connexe et que pour toute arête $e \in E$ $G' = (V, E \setminus \{e\})$ n'est pas connexe.
- G est un arbre s'il est acyclique et que pour toute arête $e \notin E$ $G' = (V, E \cup \{e\})$ contient un cycle.

Exercice 4: On appelle arbre couvrant d'un graphe $G = (V, E)$ tout sous-graphe $T = (V', E')$ tel que $V' = V$ et T est un arbre.

1. Montrer que tout graphe connexe possède un arbre couvrant.
2. Soit $A \in E$ un ensemble d'arêtes acyclique. Montrer qu'il existe un arbre couvrant ayant toute arête de A comme arête.

Exercice 5: Montrer que $K_{3,3}$ n'est pas planaire. On adaptera la méthode utilisée pour K_5.

Exercice 6: Soit $P_1...P_n$ n points du plan, $n \geq 3$ et soit d la plus petite distance entre deux de ces points. Montrer que le nombre de paires de points distants de d est au plus $3n - 6$.

Exercice 7:

1. Soit G un graphe complet à 6 ayant chacune de ses arêtes coloriée soit en rouge, soit en vert. Montrer qu'il existe un sous-graphe complet à 3 sommets dont toutes les arêtes sont de la même couleur.
2. Soit G un graphe complet infini tel que chacune de ses arêtes soit coloriées soit en rouge, soit en vert. Montrer qu'il existe un sous-graphe complet infini dont toutes les arêtes sont de la même couleur.
3. Soit $k > 0$ un entier, montrer qu'il existe un entier n tel que toute coloration avec 2 couleurs des arêtes de K_n possède un sous-graphe complet de taille k dont toutes les arêtes sont de même couleur.

Exercice 8: Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, fini et planaire. Montrer qu'il peut être représenté dans le plan de telle sorte que toutes ses arêtes soient des segments.

Exercice 9: Soit $G = (V, E)$ un graphe fini, simple, planaire-maximal. Montrer que G^* (graphe dual de G) est hamiltonien si et seulement si il existe une coloration de G avec deux couleurs telle que G n'ait pas de cycle dont tous les sommets sont de la même couleur.

Exercice 10: Soit $G = (V, E)$ un graphe fini simple. On suppose que G n'admet pas de sous-graphe isomorphe à K_5, et que tout couple de graphes isomorphes à K_3 admet un sommet commun. Montrer qu'on peut trouver deux arêtes telles que le graphe obtenu en ôtant ces arêtes ne possède pas de sous-graphe isomorphe à K_3.

Exercice 11: Un petit exercice si certains s'ennuient. Pour $G = (V, E)$ un graphe fini on note $Aut(G)$ (qu'on lit automorphismes de G) l'ensemble des applications ϕ bijective de V dans V telles que $\forall v, w \in V, ((v, w) \in E) \Leftrightarrow ((\phi(v), \phi(w)) \in E)$.

1. Pour tout n, m entiers naturels trouver $Aut(K_n)$ et $Aut(K_{n,m})$.
2. Trouver un graphe G non orienté tel que $Aut(G) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
3. Soit H un groupe fini, trouver un graphe G fini non orienté tel que $Aut(G) \cong H$.