

# Equations fonctionnelles

Cyril Letrouit\*

17 octobre 2015

Quelques références utiles :

- Problem-solving strategies, A. Engel
- Cours de l'OFM de Pierre Bornsztein "Equations fonctionnelles"
- Le site [http://www.artofproblemsolving.com/community/c13\\_contest\\_collections](http://www.artofproblemsolving.com/community/c13_contest_collections), pour des énoncés d'olympiades du monde entier.

Méthodes à tester systématiquement en équations fonctionnelles :

- Chercher des solutions particulières simples : fonctions constantes, affines, polynômes.
- Déterminer des valeurs particulières pour  $f(x)$ , par exemple  $f(0)$  ou  $f(1)$ .
- Etudier les propriétés des solutions éventuelles : injectivité, surjectivité, bijectivité, parité, monotonie, signe, périodicité...
- Exploiter les symétries éventuelles de l'équation fonctionnelle.
- Introduire une variable supplémentaire dans l'équation fonctionnelle.
- Itérer la relation fonctionnelle de l'énoncé.

**Exercice 1 :** Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \neq 1, \quad f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

**Exercice 2 :** Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) > f(f(n))$$

**Exercice 3 :** Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  telles que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(xf(y)) = yf(x)$$

**Exercice 4 :** Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)f(xy)$$

**Exercice 5 :** Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y^2) \geq (y+1)f(x)$$

**Exercice 6 :** Trouver toutes les  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  bijectives telles que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n)$$

**Exercice 7 :** Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2$$

---

\*cyril.letrouit@ens.fr