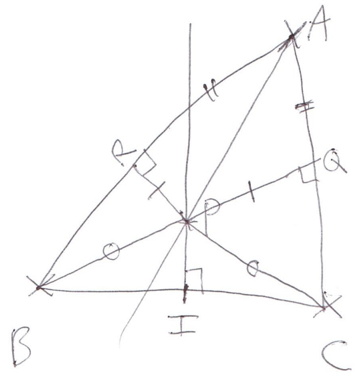
Parimaths, séance du 21/03/2015.

Exercice 1. Voici un théorème et sa démonstration ci-dessous ! Ce théorème et sa démonstration sont-ils justes ? Justifier.

Théorème. Tout triangle est isocèle.

Démonstration.



Soit ABC un triangle. Raisonnons par l'absurde : supposons que ABC n'est pas isocèle en A. Soit P le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la médiatrice du segment $[BC]$. Soient Q et R les projetés orthogonaux de P sur les droites (AC) et (AB), respectivement (i.e : le point Q est l'intersection de (AC) et de la perpendiculaire à (AC) passant par P). Traçons rapidement un schéma à main levée pour pouvoir mieux raisonner !

Les triangles APR et APQ ont deux angles en commun donc ils sont semblables. Comme ils ont aussi le côté $[AP]$ en commun, ils sont même isométriques, donc $AR = AQ$ et $PR = PQ$.
Le point P appartient à la médiatrice du segment $[BC]$ donc $PB = PC$. Les triangles PRB et PQC sont rectangles respectivement en R et en Q donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $RB^2 = PB^2 - PR^2$ et $QC^2 = PC^2 - PQ^2$. Comme, $PB = PC$ et $PR = PQ$, on en déduit que : $RB^2 = QC^2$ donc $RB = QC$ (les longueurs étant toujours positives !). Finalement, on a : $AB = AR + RB = AQ + QC = AC$ donc le triangle ABC est isocèle en A ! Ce qui contredit l'hypothèse de départ donc tous les triangles sont isocèles !

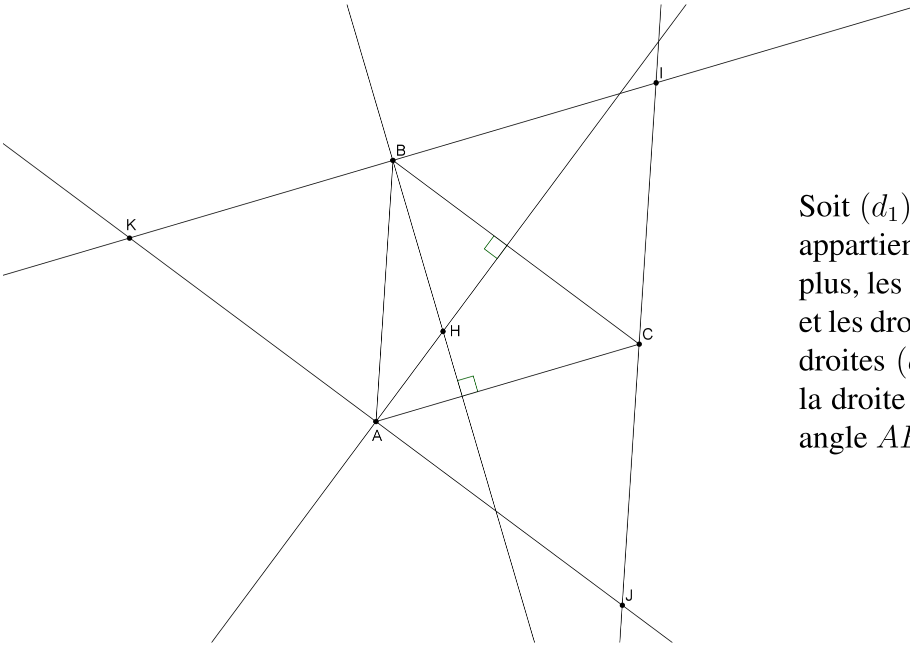
Solution de l'exercice 1. Bien sûr, ce théorème est totalement faux donc la démonstration est également fausse. Mais où est l'erreur ? Elle est subtile : elle se trouve dans les égalités : $AB = AR + RB = AQ + QC$. Sur notre schéma à main levée (qui est bien trop imprécis et même faux pour "pouvoir mieux raisonner" comme il est écrit ci-dessus !), on voit que P est à l'intérieur du triangle et du coup, les points R et Q appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, ce qui n'est pas vrai si P est à l'extérieur du triangle ! En fait, on a même prouvé par l'absurde que le point P se trouve toujours à l'extérieur du triangle ABC si ABC n'est pas isocèle (et que l'on suppose non plat !) et ainsi, l'un des points Q et R sera à l'extérieur du triangle si ce dernier n'est pas isocèle. D'où l'importance de raisonner sur de bonnes figures et même, si possible, sur plusieurs figures !

Exercice 2. Montrer, en utilisant uniquement les outils du collège, que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point (appelé orthocentre du triangle).

Solution de l'exercice 2.

Soit ABC un triangle.
La parallèle à (AB) passant par C et la parallèle à (AC) passant par B se coupent en I, la parallèle à (BC) passant par A et la parallèle à (AB) passant par C se coupent en J et enfin, la parallèle à (AC) passant par B et la parallèle à (BC) passant par A se coupent en K.

On a : $(AK) /\!/ (BC)$ et $(BK) /\!/ (AC)$ donc $AKBC$ est un parallélogramme donc $AK = BC$. De plus, $(AJ) /\!/ (BC)$ et $(CJ) /\!/ (AB)$ donc $ABCJ$ est un parallélogramme. Ainsi, $BC = AJ$. Comme $A \in [KJ]$ et $AK = AJ$, on en déduit que A est le milieu du segment $[KJ]$. De même, on montre que C est le milieu de $[IJ]$ et que B est le milieu de $[IK]$.

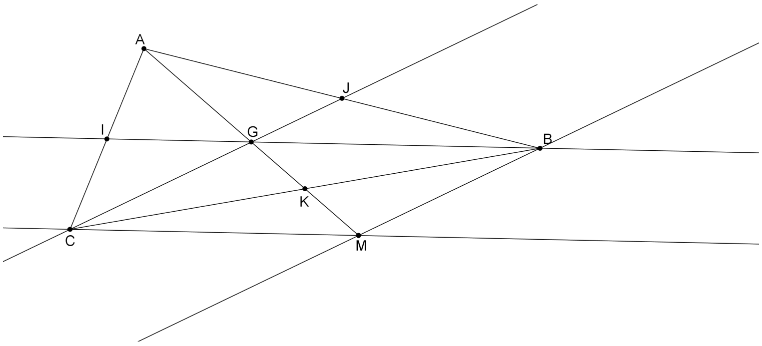


Soit (d_1) la médiatrice du segment $[JK]$. Ainsi, A appartient à (d_1) car A est le milieu de $[KJ]$. De plus, les droites (d_1) et (JK) sont perpendiculaires et les droites (JK) et (BC) sont parallèles donc les droites (d_1) et (BC) sont perpendiculaires. Donc, la droite (d_1) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

De même, nous montrons que la médiatrice de $[IK]$ est la hauteur issue de B dans le triangle ABC et que la médiatrice de $[IJ]$ est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
Or, les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes donc les trois médiatrices du triangle IJK sont concourantes, ce qui prouve que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

<u>Exercice 3.</u> Montrer, en utilisant uniquement les outils du collège, que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point (appelé centre de gravité du triangle) et que ce point est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

<u>*Solution de l'exercice* 3.</u>



Soit ABC un triangle. On note : I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AB]$ et $[BC]$. Les droites (BI) et (CJ) sont alors des médianes du triangle ABC. Les droites (CJ) et (BI) ne sont pas parallèles donc elles sont sécantes en un point que l'on note G. Enfin, on note M le symétrique du point A par rapport à G.

D'après le théorème des milieux appliqué aux triangles ACM et ABM, on en déduit que : $(IG) \mathbin{/\!/} (CM)$ et que : $(GJ) \mathbin{/\!/} (BM)$. Comme $G \in (IB)$ et $(IG) \mathbin{/\!/} (CM)$, $(GB) \mathbin{/\!/} (CM)$. De même, on montre que $(CG) \mathbin{/\!/} (BM)$. Donc le quadrilatère $BMCG$ est un parallélogramme. Ses diagonales : $[BC]$ et $[GM]$ ont alors le même milieu : K (puisque par hypothèse K est le milieu de $[BC]$). Le point K est alors le milieu du segment $[GM]$ et comme M est le symétrique de A par rapport à G, on en déduit que les points A, G, K et M sont alignés. Ainsi, $G \in (AK)$. Donc les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

De plus, on a : $AK = AG + GK$. Or, $GK = \dfrac{1}{2}GM = \dfrac{1}{2}AG$ donc on obtient : $AK = \dfrac{3}{2}AG$ donc $AG = \dfrac{2}{3}AK$.
On montre de la même façon que $CG = \dfrac{2}{3}CJ$ et que $BG = \dfrac{2}{3}BI$.

<u>Exercice 4 : droite d'Euler.</u> Soit ABC un triangle. On note H son orthocentre, G son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit.
1) Démontrer que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
2) Démontrer la relation vectorielle : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
3) En déduire que les points O, G et H sont alignés.

Solution de l'exercice 4.

1) On note M le symétrique du point A par rapport au point G. On a vu dans l'exercice précédent que le quadrilatère $BMCG$ est un parallélogramme. Donc par la règle du parallélogramme, on a : $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$. On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GK}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$ (en utilisant le fait que : $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$ car K est le milieu du segment $[GM]$) ainsi, on obtient : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$ d'où : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Remarque. La relation de cette question : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ nous apprend que le point G est le barycentre des points A, B et C, chacun affecté du coefficient 1 (par exemple !). On note : $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$. On dit aussi que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

2) Soit H' le point tel que : $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Soit A' le milieu du segment $[BC]$.
Par la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C} \Rightarrow \overrightarrow{AH'} = 2\overrightarrow{OA'}$ ($\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$ car A' est le milieu de $[BC]$). Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AH'}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires donc les droites (AH') et (OA') sont parallèles. Or, (OA') est la médiatrice de $[BC]$ (car O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et A' est le milieu de $[BC]$), donc on a : $(AH') \perp (BC)$. Ainsi, (AH') est la hauteur issue de A dans le triangle ABC donc $H' \in (AH)$. On montre de même que $H' \in (BH)$ donc $H' = H$.
3) On écrit : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$ et comme, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, on en déduit que : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Donc les points O, G et H sont alignés.

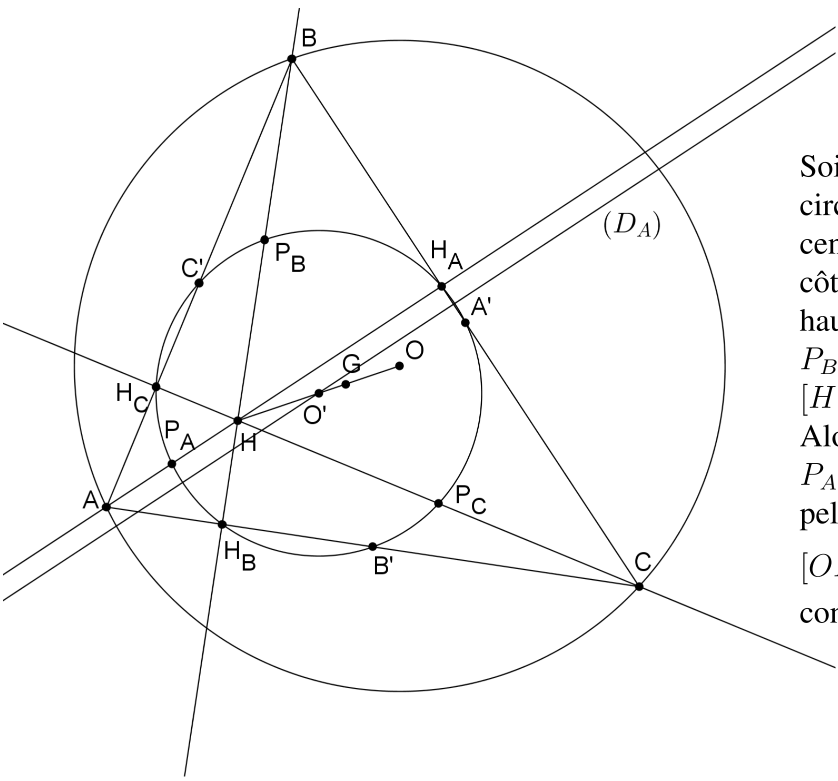
Remarque. On reprend les notations de l'exercice 4. On appelle droite d'Euler : la droite passant par les points O, G et H.

Définition : homothétie (du plan). L'homothétie de centre O et de rapport λ (où O est un point du plan et λ est un réel non nul) est une transformation du plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$.

Théorème (admis). Une homothétie h de rapport λ transforme un cercle de centre I et de rayon R en un cercle de centre I' et de rayon R' avec : $I' = h(I)$ et $R' = |\lambda|R$.

Exercice 5. L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème : cercle d'Euler.



Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité et H son orthocentre. Soient A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement et P_A, P_B et P_C les milieux respectifs des segments $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$.
Alors, les neuf points A', B', C', H_A, H_B, H_C, P_A, P_B, P_C appartiennent à un même cercle appelé cercle d'Euler, de centre O' milieu du segment $[OH]$ et de rayon $\frac{R}{2}$ où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soient O' le milieu de $[OH]$ et Γ le cercle de centre O' et de rayon $\frac{R}{2}$.

1) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. Démontrer que h envoie le cercle circonscrit au triangle ABC sur Γ.
2) Montrer que les points A', B', $C' \in \Gamma$.
3) Soit h' l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$. Démontrer que h' envoie le cercle circonscrit au triangle ABC sur Γ.
4) Montrer que P_A, P_B et $P_C \in \Gamma$.
5) Soit (D_A) la parallèle à la droite (AH_A) passant par le point O'. Montrer que $(D_A) /\!/ (OA')$.
6) Montrer que la droite (D_A) est la médiatrice du segment $[H_AA']$ et en déduire que $H_A \in \Gamma$.
On prouve exactement de la même façon que H_B et H_C appartiennent à Γ.

Solution de l'exercice 5.

1) On a : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ donc $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} = 3\overrightarrow{OG}$ d'où $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$. Ainsi, $\overrightarrow{GO'} + \overrightarrow{O'H} = 2\overrightarrow{OG}$ donc $\overrightarrow{GO'} = 2\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{O'H}$ d'où (en utilisant que $\overrightarrow{O'H} = \overrightarrow{OO'}$) $\overrightarrow{GO'} = 2\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{GO'}$ ainsi, $2\overrightarrow{GO'} = \overrightarrow{OG}$. Par conséquent, on obtient : $\overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. Cela nous permet de conclure que $h(O) = O'$ et donc que h envoie le cercle circonscrit à ABC sur Γ.
2) Comme on a : $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ (relation obtenue en utilisant : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$), on en déduit que : $h(A) = A'$. De même, on montre que $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$. Ainsi, les points A', B' et C' appartiennent à Γ.
3) On a : $\overrightarrow{HO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$ (car O' est le milieu du segment $[HO]$) donc $h'(O) = O'$ donc h' envoie le cercle circonscrit à ABC sur Γ.
4) De la relation : $\overrightarrow{HP_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$, on déduit que : $h'(A) = P_A$. De même, on montre que : $h'(B) = P_B$ et que : $h'(C) = P_C$. Ainsi, P_A, P_B et P_C appartiennent à Γ.
5) Comme $(AH_A) \perp (BC)$, on en déduit que : $(D_A) \perp (BC)$. Le point A' est le milieu de $[BC]$ et O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC donc (OA') est la médiatrice de $[BC]$ ainsi : $(OA') \perp (BC)$. Ainsi, $(D_A) /\!/ (OA')$.
6) En appliquant le théorème des milieux dans le triangle HOH_A puis dans le triangle OH_AA', on montre que la droite (D_A) coupe le segment $[H_AA']$ en son milieu.
La droite (D_A) coupe le segment $[H_AA']$ en son milieu tout en lui étant perpendiculaire donc la droite (D_A) est la médiatrice du segment $[H_AA']$. Ainsi, on a : $O'H_A = O'A' = \frac{R}{2}$ donc $H_A \in \Gamma$.

Exercice 6. On reprend les notations de l'exercice précédent.
Montrer que le point O' est le milieu du segment $[P_AA']$.

Solution de l'exercice 6.

Le triangle P_AH_AA' est rectangle en H_A donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse : $[P_AA']$. Or, les points P_A, A' et H_A appartiennent au cercle d'Euler de centre O' donc le cercle d'Euler est le cercle circonscrit au triangle P_AH_AA' ainsi, O' est le centre du cercle circonscrit au triangle P_AH_AA'. Par conséquent, O' est le milieu de $[P_AA']$.

J'avais aussi un sujet de CAPES passionnant de la session 2014 à vous proposer ! Voici un lien vers le sujet : http ://megamaths.perso.neuf.fr/annales/capes2014comp1e.pdf.
Pour toute(s) question(s) sur ces exercices et/ou sur le sujet de CAPES, n'hésitez pas à me contacter par mail à l'adresse suivante : nicolas.segarra@u-psud.fr.