Exercice 1 On dispose de morceaux de légumes différents : poivron, tomate, courgette, aubergine. Combien de brochettes différentes constituées de 9 morceaux de légumes peut-on préparer ? Combien de brochettes différentes constituées d'au plus trois morceaux peut-on préparer ?

Exercice 2 Un groupe de 12 amis organise un tournoi de curling en 1 contre 1. Chaque joueur joue exactement une fois contre tous les autres joueurs. Combien de matchs auront lieu ?

Exercice 3 De combien de façons peut-on placer 8 tours sur un échiquier de taille 8×8 de telle sorte qu'aucune tour ne puisse en prendre une autre ?

Exercice 4 On dispose de boîtes numérotées de 1 à 2015 et de jetons numérotés de 1 à 2015. On place tous les jetons dans les boîtes de la manière suivante : si l'on met le jeton portant le numéro i dans la boîte j, alors on doit mettre le jeton portant le numéro j dans la boîte i, i et j étant deux entiers compris entre 1 et 2015, pas forcément distincts. Montrer qu'il existe au moins un jeton qui est dans la boîte portant le même numéro.

Exercice 5 Sur une grille infinie, on place un pion, que l'on s'autorise à déplacer à chaque étape d'une case vers le haut, le bas, la droite ou la gauche. Est-il possible qu'au bout de 2015 étapes le pion soit revenu à sa case de départ ?

Exercice 6 (OFM) Dans un pays se trouvent 10 villes. Deux villes quelconques sont toujours reliées directement par exactement une route à sens unique. Les routes ne se croisent jamais, certaines passant au besoin au-dessus des autres à l'aide de ponts. Malheureusement, les responsables du Ministère du Sens et de la Circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on quitte une ville quelconque, il est alors impossible d'y revenir, même en passant par plusieurs villes et plusieurs routes.

1. Montrer qu'il existe une ville dont on ne peut sortir.
2. Montrer qu'il existe une ville depuis laquelle on peut atteindre directement toutes les autres (c'est-à-dire sans passer par les autres villes).

Exercice 7 On prend une feuille de papier. On la déchire en quatre morceaux. On obtient ainsi 4 morceaux de papier. On en choisit certains (pas nécessairement tous), que l'on peut à nouveau déchirer en 4, et ainsi de suite. Est-il possible, en choisissant judicieusement ses opérations, qu'à un moment l'on dispose d'exactement 200 morceaux de papier ?

Exercice 8 Soit $n \geq 1$ un entier. On dispose $4n$ jetons bleus et $2n$ jetons rouges de 1 cm de diamètre, qui sont alignés côte à côte dans un ordre inconnu. Une réglette de longueur $3n$ centimètres recouvre initialement les $3n$ jetons de gauche. À chaque minute, Anémone la déplace d'un jeton vers la droite (donc recouvrant un nouveau jeton et découvrant un autre). Montrer qu'à un moment, elle recouvre exactement n jetons bleus.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère un tableau de n lignes et n colonnes, puis à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne on écrit le plus petit nombre parmi i et j. Par exemple, à l'intersection de la deuxième ligne et de la troisième colonne, on écrit 2. Ensuite, on calcule la somme de tous les nombres inscrits dans le tableau et on l'appelle N. Montrer que N est égal à la somme des carrés des entiers de 1 à n. Par exemple, si $n = 3$, il s'agit de montrer que $N = 1^2 + 2^2 + 3^2$.

Exercice 10 Fipi et Charles s'affrontent de la manière suivante : au début du jeu, ils disposent de 100 allumettes sur la table. Ils jouent chacun à leur tour. À chaque étape, le joueur qui joue enlève au choix de 1 à 7 allumettes. Le joueur qui retire la dernière allumette perd. Fipi joue en premier.

Montrer que Fipi peut s'assurer de gagner (on dit qu'il dispose d'une *stratégie gagnante*). Décrire sa stratégie.

Exercice 11 Arsène et Bernard dérobent un collier composé de perles de couleurs différentes, avec un nombre pair de perles de chaque couleur. Ils décident de se partager les perles en ne coupant la chaînette du collier qu'à deux endroits, afin de la préserver, car celle-ci est en or. De plus, ils veulent avoir chacun autant de perles de chaque couleur. Comment doivent-ils procéder ?

Exercice 12 On dispose d'une table rectangulaire de un mètre sur deux mètres, et d'une infinité de pièces qui ont la forme de petits disques de 1 centimètre de diamètre. Un gnome et un poulpe jouent au jeu suivant : tour à tour, ils placent une pièce sur la table, et le premier qui ne peut plus en placer a perdu. Le gnome commence à jouer. Un des joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, lequel ? Décrire sa stratégie.

Exercice 13 (Difficile) On considère une suite d'au moins 11 nombres réels telle que la somme de 11 réels consécutifs de la suite est toujours strictement positive, et la somme de 7 réels consécutifs de la suite est toujours strictement négative. Quelle est la longueur maximale de la suite ?

Exercice 14 (Difficile) On considère un octogone régulier, que l'on pave par des parallélogrammes, c'est-à-dire qu'on le recouvre intégralement par des parallélogrammes qui ne dépassent pas de l'octogone régulier et qui ne se chevauchent pas. Montrer que parmi ces parallélogrammes, il y a au moins deux rectangles.

Exercice 15 (Très difficile mais intéressant, d'après olympiades internationales 2010) Au début, chacune des six boîtes B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 et B_6 contient un jeton. Deux types d'opération sont possibles :

— Type 1 : Choisir une boîte non vide B_j avec $1 \leq j \leq 5$; ôter un jeton de la boîte B_j et ajouter deux jetons dans la boîte B_{j+1}

— Type 2 : Choisir une boîte non vide B_k avec $1 \leq k \leq 4$; ôter un jeton de la boîte B_k et échanger les contenus des boîtes (éventuellement vides) B_{k+1} et B_{k+2}.

Montrer qu'il est possible, à la suite d'un nombre fini de telles opérations, que les boîtes B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 soient vides et que la boîte B_6 contienne $2010^{2010^{2010}}$ jetons. (Au début, essayer simplement de générer autant de jetons que possible sans prendre en compte l'objectif un peu déprimant de $2010^{2010^{2010}}\ldots$).

Indication 1 : Montrer qu'on peut toujours commencer par vider la boîte B_1 pour ajouter 2 jetons à la boîte B_2.

Indication 2 : En notant (a,b,c,d,e,f) la configuration où B_1 contient a jetons, etc., montrer qu'on peut passer d'une configuration $(0,b,c,d,e,0)$ à $(0,b,c,d-1,2e,0)$, puis à $(0,b,c-1,2^d e,0,0)$ et enfin à $(0,b-1,[\text{un grand nombre}],0,0,0)$.

Si vous avez une remarque, un commentaire, ou que vous voulez la solution à un problème, n'hésitez pas : felix.lequen@gmail.com