f étant une fonction, on notera $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.

Définition 1. *Une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est dite continue en $x \in \mathcal{D}_f$ si $f(y)$ converge vers $f(x)$ quand y tend vers x avec $y \in \mathcal{D}_f$, c'est-à-dire*

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}_f \quad (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$

f est dite continue sur $A \subset \mathcal{D}_f$ si elle l'est en tous points de A. On dit alors que f est de classe $\mathcal{C}^0(A)$.

Propriétés 2.
- *Soient f et g continues sur A. Alors $f+g$ et fg sont continues sur A.*
- *Soient $f : \mathcal{D}_f \to B$ continue sur $A \subset \mathcal{D}_f$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ continue sur $B \subset \mathcal{D}_g$. Alors $g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R},\ x \longmapsto g(f(x))$ est continue sur A.*

Exercices

1. Démontrer les propriétés ci-dessus.
2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, indiquer où elle est continue.
   - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto 5x^7 + \frac{3}{2}x^6 - 4x^4 + 2x + 1$
   - $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \mathrm{pgcd}(x, 2^{|x|})$
   - $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, c'est-à-dire la fonction qui vaut 1 si $x \geq 0$ et 0 sinon.
   - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, c'est-à-dire la fonction qui vaut 1 si x est rationnel et 0 sinon.
3. Les fonctions suivantes sont-elles continues en 0 ?
   - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin(\frac{1}{x}) & \text{sinon} \end{cases}$
   - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\sin(\frac{1}{x}) & \text{sinon} \end{cases}$
4. Quelles sont les fonctions continues telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$?
5. Quelles sont les fonctions continues telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$?
6. Quelles sont les fonctions continues telles que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$?

Propriété 3 (Caractérisation séquentielle)**.** *Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, et $x \in \mathcal{D}_f$. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en x*
2. *Pour toute suite (u_n) qui tend vers x, $(f(u_n))$ tend vers $f(x)$*

Propriété 4 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et $c \in [f(a); f(b)]$ (ou $[f(b); f(a)]$). Alors il existe $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = c$.

Autrement dit, une fonction continue allant de $f(a)$ à $f(b)$ atteint forcément toutes les valeurs intermédiaires.

Démonstration. Supposons $f(a) < f(b)$.

Soit $x = \sup\{t \in [a;b] | f(t) < c\}$. Cet ensemble est non vide (a est dedans) et majoré par b donc ce sup existe bien.

Montrons que ce x vérifie l'énoncé. Par définition du sup, il existe deux suites (u_n) et (v_n) dans $[a;b]$ qui tendent vers x et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $u_n \leq x$
- $v_n \geq x$

- $f(u_n) < c$
- $f(v_n) \geq c$

Alors par caractérisation séquentielle, $f(u_n) \to f(x)$ donc $f(x) \leq c$ et $f(v_n) \to f(x)$ donc $f(x) \geq c$, d'où l'égalité. □

Propriété 5.

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$. Alors f est bornée sur $[a;b]$ et atteint son minimum et son maximum.

Démonstration. Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans $[a;b]$ telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ convergent respectivement vers le sup et l'inf de f sur $[a;b]$. Alors comme ce sont des suites à valeur dans un intervalle fermé borné, on peut en extraire des sous-suites convergentes de limite u et v respectivement (par le théorème de Bolzano-Weierstrass), et $f(u)$ et $f(v)$ sont le maximum et le minimum de f sur $[a;b]$ (en particuliers ils sont finis, donc f est bornée et atteint ses bornes). □

Exercice

Tiré de l'exercice 6 du TFJM 2014.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$ on note $f^{-1}(E)$ l'ensemble des réels x vérifiant $f(x) \in E$. On dira qu'un ensemble A d'entiers naturels (non nécessairement fini) est un *support* de $\mathbb{R}$ s'il existe une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(\{x\})$ est fini ;
- $A = \{\text{Card } f^{-1}(\{x\}), x \in \mathbb{R}\}$.

1. Les ensembles suivants sont-ils des supports de $\mathbb{R}$?
   - $\{1\}$
   - $\{2\}$
   - $\{3\}$
   - $\{0, 1, 2\}$
   - $\{0, 1\}$
   - $\{0, 2\}$
   - $\{0, 3\}$
   - $\{0, 2, 4\}$
   - $\{3, 4, 5\}$
   - $\{3, 5, 7\}$
   - $\{2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$
   - $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$
   - $\mathbb{N}$
2. Montrer que si f est une fonction de support A, et $0 \notin A$, alors soit ($f \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et $f \underset{-\infty}{\to} -\infty$), soit ($f \underset{+\infty}{\to} -\infty$ et $f \underset{-\infty}{\to} +\infty$)
3. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\{n\}$ est-il un support de $\mathbb{R}$?
4. ($\star$) Trouver tous les supports de $\mathbb{R}$.

Correction

Une remarque sur l'utilisation de la définition. Pour prouver qu'une fonction est continue sur un domaine A, il faut prouver qu'elle est continue en tout point de A. On commence donc par dire "soit $x \in A$". Ensuite, il faut vérifier que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [x-\delta; x+\delta]$, $f(y) \in]f(x)-\epsilon; f(x)+\epsilon[$. Pour cela, on prend un $\epsilon > 0$ quelconque, puis on cherche un δ pour lequel la propriété sera vraie. D'où le raisonnement suivant :

Soit $x \in A$. Soit $\epsilon > 0$. Cherchons $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [x-\delta; x+\delta] \cap \mathcal{D}_f$ on ait $f(y) \in]f(x)-\epsilon; f(x)+\epsilon[$. ...

1. Preuve des propriétés 2.
   - ***f + g.*** Soient f et g deux fonctions continues en x.
     Soit $\epsilon > 0$.
     Il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $y \in [x-\delta_1; x+\delta_1] \cap \mathcal{D}_f, |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ et pour tout $y \in [x-\delta_2; x+\delta_2] \cap \mathcal{D}_g, |g(x)-g(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.
     Alors en posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, pour tout $y \in [x-\delta; x+\delta] \cap \mathcal{D}_{f+g}$,

     $$\begin{aligned} |(f+g)(x)-(f+g)(y)| &= |f(x)-f(y)+g(x)-g(y)| \\ &\leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

     D'où $f+g$ continue en x.

   - ***fg.*** Soient f et g deux fonctions continues en x.
     Soit $\epsilon > 0$. On peut supposer $\epsilon < 1$. Soit $M = max(1, |f(x)+1|, |f(x)-1|, |g(x)+1|, |g(x)-1|)$.
     Il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $y \in [x-\delta_1; x+\delta_1] \cap \mathcal{D}_f, |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2M}$ et pour tout $y \in [x-\delta_2; x+\delta_2] \cap \mathcal{D}_g, |g(x)-g(y)| < \frac{\epsilon}{2M}$.
     Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Remarquons qu'alors pour tout $y \in [x-\delta; x+\delta] \cap \mathcal{D}_{fg}$, $|f(y)| \leq M$ et $|g(y)| \leq M$. De plus,

     $$\begin{aligned} |(fg)(x)-(fg)(y)| &= |f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)| \\ &= |f(x)(g(x)-g(y))+g(y)(f(x)-f(y))| \\ &\leq |f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)| \\ &< M\frac{\epsilon}{2M}+M\frac{\epsilon}{2M} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

     D'où fg continue en x.

   - ***g ∘ f.*** Soient f et g deux fonctions continues en x et $f(x)$ respectivement.
     Soit $\epsilon > 0$.
     Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in [f(x)-\eta; f(x)+\eta] \cap \mathcal{D}_g, |(g(f(x))-g(y)| < \epsilon$.
     Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [x-\delta; x+\delta] \cap \mathcal{D}_f, |f(x)-f(y)| < \eta$.

Alors pour tout $y \in [x-\delta; x+\delta] \cap \mathcal{D}_{g \circ f}$, on a $f(y) \in [f(x)-\eta; f(x)+\eta] \cap \mathcal{D}_g$, et donc $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| < \epsilon$.
D'où $g \circ f$ continue en x.

2. – Les polynômes sont une somme de produits des fonctions $x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$) et $x \mapsto x$, qui sont continues sur $\mathbb{R}$, donc ils sont continus sur $\mathbb{R}$.
   – Si on prend $\delta = \frac{1}{2}$, l'ensemble $[x-\delta; x+\delta] \cap \mathcal{D}_f$ est réduit à un seul point, x, pour lequel l'inégalité est toujours vraie quel que soit $\epsilon > 0$. f est donc continue sur $\mathbb{Z}$.
   – Cette fonction est constante autour de chaque point de son domaine de définition, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Elle ne peut pas être prolongée en 0 à cause du "saut" : quel que soit l'intervalle contenant 0 choisi, il y aura toujours des points où la fonction vaudra 0 et d'autres où elle vaudra 1. On aboutit à une contradiction dans la définition en prenant par exemple $\epsilon = \frac{1}{4}$.
   Une autre méthode consiste à utiliser la contraposée de la caractérisation séquentielle : si on trouve deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers x mais telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ont des limites différentes, alors f n'est pas continue en x. Ici, les suites $(u_n) = (\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ et $(v_n) = (\frac{-1}{n})_{n \geq 1}$ marchent.
   – $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$: tout réel x peut être approché par une suite de rationnels et d'irrationnels (par exemple $u_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$ et $v_n = u_n + \frac{\sqrt{2}}{10^n}$).
   Cette propriété permet de conclure que f n'est continue nulle part.
3. – Non : les suites $u_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ contredisent la caractérisation séquentielle.
   – Oui : $|f(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc quelle que soit la suite (u_n) qui tend vers 0, on aura que $(f(u_n))$ converge vers $0 = f(0)$. D'où f continue en 0 par caractérisation séquentielle.
4. Appliquons la relation à des valeurs particulières. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$
   $f(3x) = f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 3f(x)$
   et par récurrence
   $f(nx) = nf(x)$
   et $f(\frac{x}{n}) = \frac{f(x)}{n}$
   Il en découle :
   $f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q}f(1)$
   Ainsi, en posant $a = f(1)$, on a montré que
   $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = ax$
   Reste à passer à $x \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite de rationnels qui converge vers x. Alors comme par hypothèse f est continue, $f(u_n)$ converge vers $f(x)$, or $f(u_n) = au_n$ converge vers ax. D'où $f(x) = ax$ par unicité de la limite.
   Réciproquement, on vérifie facilement que cette fonction vérifie l'énoncé.
   Ainsi, les seules fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation sont les fonctions linéaires.
5. Il est possible de reproduire le raisonnement précédent pour cette question. Nous allons utiliser une autre méthode pour se ramener à la question précédente sans refaire les calculs.
   Soit f une solution. Montrons que soit f est nulle, soit elle ne s'annule jamais.
   Cas 1. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$.
   Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, $f(b) = f(a + (b-a)) = f(a)f(b-a) = 0$. D'où f est nulle.
   Réciproquement, la fonction nulle est bien une solution.
   Cas 2. Supposons que f ne s'annule jamais. En particulier, f est de signe constant (sinon le théorème des valeurs intermédiaires fournirait un zéro) et comme $f(0) = f(0)^2 \geq 0$, f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

La fonction $g = \ln \circ f$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, et vérifie l'équation de la question 4 (puisque ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie que pour tout réels x et y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$) et donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, puisque $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$, il vient $f(x) = \exp(ax) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, ces fonctions sont bien solution de l'énoncé (elles sont continues sur $\mathbb{R}$ et vérifient la relation demandée).

D'où les solutions sont la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto e^{ax}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

6. Montrons que soit f est nulle, soit elle est constante égale à 1, soit elle est nulle en 0 et non nulle ailleurs.

   Cas 1. Supposons qu'il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) = 0$.

   Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, $f(b) = f(a\frac{b}{a}) = f(a)f(\frac{b}{a}) = 0$. D'où f est nulle.

   Réciproquement, la fonction nulle est bien une solution.

   Cas 2. Supposons que $f(0) \neq 0$.

   Alors puisque $f(0) = f(0y) = f(0)f(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, il vient $f(y) = 1$ pour tout réel y, et donc f est constante égale à 1.

   Réciproquement, la fonction constante égale à 1 est bien une solution.

   Cas 3. Supposons que $f(0) = 0$ et f non nulle. Alors f ne s'annule qu'en 0.

   En particulier, f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

   Comme $f(1) = f(1)^2 \geq 0$, f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

   La fonction $g = \ln \circ f \circ \exp$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, et vérifie l'énoncé de la question 4 (on utilise que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tout réels x et y). Il existe donc un réel a tel que $g(x) = ax$ pour tout réel x, et donc

   $f(\exp(x)) = \exp(ax) = (\exp(x))^a$ pour tout x réel, ce qui signifie $f(y) = y^a$ pour tout $y > 0$. Cette formule reste valide pour $y = 0$ à condition que $a > 0$ (les $a \leq 0$ donnent des fonctions non continue en 0). Il reste à voir ce qui se passe pour $y < 0$.

   Cela se résoud en remarquant deux choses :
   - $f(-1)^2 = f(1) = 1$
   - $f(-x) = f(-1)f(x)$.

   On a donc deux cas selon que $f(-1) = 1$ ou $f(-1) = -1$:
   - $f(x) = |x|^a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   - $f(x) = x|x|^{a-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   Réciproquement, ces fonctions sont bien solution de l'énoncé.

   Les solutions de l'énoncé sont donc la fonction nulle, la fonction constante égale à 1, et ces fonctions pour $a > 0$.

Exercice du TFJM - éléments de réponse

Le théorème des valeurs intermédiaires et le fait qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée sont nécessaires pour prouver qu'un ensemble n'est pas un support.

- $\{1\}$ est un support de $\mathbb{R}$: $x \mapsto x$ le réalise.
- $\{3\}$ est un support de $\mathbb{R}$: il suffit de prendre la fonction qui vaut 0 en 0 et qui sur $\mathbb{R}_+$ monte jusqu'à atteindre 1, puis redescend jusqu'à toucher 0, puis monte en 2, redescend en 1, monte en 3, descend en 2, monte en 4, etc, et se comporte en symétrique sur $\mathbb{R}_-$. Ce type de fonction donne tous les supports constitués d'un seul entier impair.
- $\{0, 1, 2\}$ est réalisé par $x \mapsto x^2$.
- $\{0, 1\}$ est réalisé par $x \mapsto \exp(x)$.

- $\{0, 3\}$ est réalisé par la fonction qui réalise 3 modifiée sur $\mathbb{R}_+$ de façon à ce qu'elle fasse des pas verticaux de plus en plus petits (par exemple entre $1 - 2^n$ et $1 - 2^{n+1}$) et ne dépasse jamais 1. De même, tous les ensembles constitués de 0 et d'un entier impair sont des supports.
- $\{0, 2, 4\}$ est réalisé par $x \mapsto x^2 - x^4$.
- $\{3, 4, 5\}$ et $\{3, 5, 7\}$ sont réalisés par une modification de la fonction réalisant $\{3\}$, en faisant plus d'un aller-retour entre deux valeurs consécutives pour au moins un des paliers.
- $\{2\}$, et plus généralement les ensembles constitués d'un seul entier pair, ne sont pas des supports. De même pour $\{0, 2\}$.