Des constructions à la règle et au compas

Vincent Divol

31/01/2015

1 Introduction

Définition 1. *On se place dans le plan. On déclare les deux points $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$ comme constructibles : ce sont nos points de départs. De là, on peut construire :*

- *Une droite passant par deux points déjà construits.*
- *Un cercle de centre un point déjà construit, dont le rayon est la distance entre deux points déjà construits.*

On crée alors de nouveaux points constructibles comme intersections de cercle(s)/droite(s) ainsi tracées. On dit qu'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est constructible si il existe deux points P et Q constructibles avec $PQ = |x|$.

Exercice 1.

1. *Montrer que 1, 2, -1 et plus généralement tous les entiers relatifs sont constructibles.*
2. *Montrer plus généralement que si x et y sont constructibles, alors $x + y$ est constructible.*
3. *Montrer que $1/2$, $1/4$, $7/4$ sont constructibles. Montrer que si x et y sont constructibles, alors $\frac{x+y}{2}$ est constructible.*
4. *Montrer que $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$ sont constructibles (Indication : penser à Pythagore).*

Exercice 2. *Construire $1/x$ et $x.y$ à partir de x et y (Indication : penser à Thalès). En déduire que tout nombre rationnel est constructible.*

Exercice 3. *Construire $\sqrt{x}$ à partir de $x \geq 0$.*

2 Premières constructions

On va maintenant s'attaquer à la construction de quelques figures géométriques à l'aide des méthodes qu'on vient de développer. En guise qu'échauffement, tracez un triangle équilatéral (beaucoup de méthodes existent, essayez de faire le plus "économique" possible).

1. On appelle A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 les sommets du pentagone régulier. Montrer que $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4} + \vec{OA_5} = \vec{0}$. En déduire une équation reliant les $cos(k\theta_0)$ pour $k = 1, \dots 5$, où $\theta_0 = \frac{2\pi}{5}$.
2. On rappelle la formule vraie en toute généralité : $cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1$. Trouver un trinôme du second degré dont $cos(\theta_0)$ est racine.
3. Tracer le pentagone.

3 Peut-on tout faire avec une règle et un compas ?

Exercice 4. *Montrer qu'il existe des nombres non constructibles (Indication : montrer que leur ensemble est dénombrable).*

Exercice 5. *Montrer que si a, b et c sont constructibles et que $ax^2 + bx + c = 0$ alors x est constructible.*

Théorème 1. *Les seules opérations auxquelles on a le droit pour obtenir un nombre constructible sont $\sqrt{}$, $+$, $-$, $\times$, $\div$, et tous les nombres ainsi obtenus sont constructibles.*

Preuve. On a déjà vu dans les exercices précédents que tous les nombres obtenus de cette manière sont effectivement constructibles à la règle et au compas. Pour montrer l'autre implication, il suffit de regarder les coordonnées d'un point obtenu respectivement comme intersection de deux droites, d'un cercle et d'une droite, de deux cercles. Je vous laisse vérifier que celles ci s'obtiennent à chaque fois à partir des opérations énoncées dans le théorème. □

4 Une excursion dans le monde des polynômes

On appelle polynôme une fonction P de la forme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Les a_k sont les **coefficient** du polynôme, n est son **degré**. Ainsi, la fonction $P : x \mapsto x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{5}$ est un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels. Le polynôme est dit **unitaire** si son **coefficient dominant** a_n est égal à 1.
Un nombre x est racine du polynôme P si $P(x) = 0$. Attention, certains polynômes n'ont pas de racine (par exemple les trinômes du second degré avec un discriminant Δ négatif). On appelle polynôme minimal d'un nombre x le polynôme unitaire de plus petit degré, **à coefficients rationnels**, non nul, ayant x pour racine.

Exercice 6. *Calculer le polynôme minimal de : $\sqrt{5}$, $1/3$, $\sqrt{7}+1$ (plus dur). Montrer que le degré du polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ est inférieur à 3. On admettra pour la suite que son degré est 3 exactement.*

La preuve du théorème nous montre que tous les nombres constructibles s'obtiennent comme racine d'un polynôme à coefficients constructibles, de degré inférieur à 2. Cela se traduit (après un peu de boulot !) de la façon suivante :

Théorème 2 (Wantzel). *Si un nombre est constructible à la règle et au compas, alors son polynôme minimal a pour degré une puissance de 2.*

Ce théorème, prouvé en 1838, a permis de résoudre toute un famille de problèmes en apparence fort peu évidents, dont notamment les "trois grands problèmes de l'Antiquité" sur lesquels les mathématiciens s'étaient cassés les dents pendant plus de 2000 ans.

Exercice 7 (La quadrature du cercle). *Le mathématicien allemand Ferdinand von Lindemann est passé à la postérité en montrant en 1882 que π était transcendant, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun polynôme non nul à coefficients rationnels ayant π pour racine. Il a ainsi pu résoudre le fameux problème de la quadrature du cercle : il est impossible de tracer un cercle et un carré de même aire. En admettant la transcendance de π, montrer ce résultat (Indication : si par l'absurde cela était possible, alors $\sqrt{\pi}$ serait constructible).*

Exercice 8 (La duplication du cube). *La légende affirme que les Déliens, étant frappés par la peste, demandèrent à l'oracle de Delphes comment faire cesser l'épidémie. L'oracle répondit que les dieux, mécontents, souhaitaient que le volume de l'autel consacré à Apollon, dont la forme était un cube parfait, soit doublée. D'après vous, les Déliens ont-ils eu une chance de réussir ?*