Exercices sur les suites
Club Parimaths, séance du 18 octobre 2014

Thomas Lehéricy

Convergence de suites

1. Déterminer la convergence et, si elle existe, la limite des suites suivantes
   - $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
   - $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
   - $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$
   - $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$
   - $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$
   - Soit x un réel, $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers $L \notin \mathbb{Q}$.
3. **Moyenne de Césaro :** Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel L, alors $C_n = \dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}$ converge aussi vers L quand $n \to \infty$. La résiproque est-elle vraie ?
   On suppose à présent $(u_n)_{n\geqslant 1}$ monotone. Montrer que $(C_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et de même monotonie que $(u_n)_{n\geqslant 1}$. A-t-on alors $((C_n)_{n\geqslant 1}$ converge $\Rightarrow (u_n)_{n\geqslant 1}$ converge) ?
4. **Série alternée :** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive décroissant vers 0. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$. Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge.
   Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite positive telle que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la formule précédente converge, que peut-on dire sur $(u_n)_{n\geqslant 0}$?
5.
   - Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers u, alors $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent aussi vers u.
   - La réciproque est-elle vraie ? Qu'en est-il si on ne suppose rien sur la limite des deux sous-suites ?
   - On suppose que $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

6. **Suites de Cauchy :** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que ses termes soient arbitrairement proches à partir d'un certain rang : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour k, j plus grands que n_0, $\mid u_j - u_k \mid < \epsilon$. Montrer alors que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Théorème de Beatty

Pour tout réel x positif, on définit sa suite de Beatty associée B^x, définie par $B^x_n = \lfloor nx \rfloor$ pour tout $n \geqslant 0$. Soit x et y des irrationnels positifs vérifiant $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. Montrer que $\{B^x_n, n \geqslant 0\} \setminus \{0\}$ et $\{B^y_n, n \geqslant 0\} \setminus \{0\}$ sont des ensembles disjoints d'union $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1 La suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci F_n par

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer les quelques propriétés suivantes :

- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$
- $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$
- $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$
- Pour tout n, d entiers naturels, F_{nd} est un multiple de F_d.
- Pour tout n entier naturel, $F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k}$
- $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

On se réfèrera utilement et avec toutes les précautions requises à Wikipédia, qui recense un certain nombre de propriétés de la suite de Fibonacci.

2 Convergence d'ensembles

Soit E un ensemble. Une suite de sous-ensembles de E est un ensemble de sous-ensembles (*parties*) de E indexé par les entiers naturels $(A_n)_{n\geqslant 0}$. Elle est dite croissante si pour tout $n \geqslant 0$, $A_n \subset A_{n+1}$, décroissante si pour tout $n \geqslant 0$, $A_{n+1} \subset A_n$. A contient B si et seulement si B est inclus dans A.

Pour tout ensemble $\mathcal{A}$ de parties de E, on définit $\sup \mathcal{A}$ comme la plus petite partie de E contenant tous les éléments de $\mathcal{A}$. On définit $\inf \mathcal{A}$ comme la plus grande partie de E contenue dans tous les éléments de $\mathcal{A}$.

1. - Montrer l'existence et exprimer simplement $\sup \mathcal{A}$ et $\inf \mathcal{A}$.
   - Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, alors $\inf \mathcal{A} \supset \inf \mathcal{B}$ et $\sup \mathcal{A} \subset \sup \mathcal{B}$.
   - Montrer que si $\mathcal{A} \neq \emptyset$, alors $\inf \mathcal{A} \subset \sup \mathcal{A}$.

- Qu'en est-il si $\mathcal{A} = \emptyset$?

2. Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de parties de E. On pose $\text{limsup}_{n\to+\infty} A_n = \inf\ _{n\geqslant 0}\sup\ _{k\geqslant n} A_k$ et $\text{liminf}_{n\to+\infty} A_n = \sup\ _{n\geqslant 0}\inf\ _{k\geqslant n} A_k$.

   - Montrer l'existence et exprimer simplement $\text{limsup}_{n\to+\infty} A_n$ et $\text{liminf}_{n\to+\infty} A_n$.
   - Montrer que $\text{liminf}_{n\to+\infty} A_n \subset \text{limsup}_{n\to+\infty} A_n$.
   - Montrer que si pour tout n, $A_n \subset B_n$, alors $\text{liminf}_{n\to+\infty} A_n \subset \text{liminf}_{n\to+\infty} B_n$ et $\text{limsup}_{n\to+\infty} A_n \subset \text{limsup}_{n\to+\infty} B_n$.

3. On dit qu'une suite converge si $\text{liminf}_{n\to+\infty} A_n = \text{limsup}_{n\to+\infty} A_n$. On note cette valeur commune $\lim_{n\to+\infty} A_n$.

   - Montrer que toute suite croissante converge.
   - Montrer que toute suite décroissante converge.
   - **Caractérisation de la convergence :** Montrer que s'il existe une suite C_n croissante et une suite D_n décroissante telles que $C_n \subset A_n \subset D_n$ pour tout n et telles que les limites de C_n et D_n soient égales, alors A_n converge vers cette limite commune.
   - **Passage à la limite dans une inégalité :** Montrer que si A_n converge vers A, si B_n converge vers B, et si $A_n \subset B_n$ pour tout n, alors $A \subset B$.
   - **Théorème d'encadrement :** Soient A_n, B_n et C_n trois suites. Montrer que si B_n converge vers L, si C_n converge vers L, et si $B_n \subset A_n \subset C_n$ pour tout n, alors A_n converge également vers L.
   - **Opération sur les limites :** Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ et $\lim_{n\to+\infty} B_n = B$, alors $\lim_{n\to+\infty}(A_n \cup B_n)$ existe et vaut $A \cup B$. Montrer la même chose pour $A_n \cap B_n$.
   - Montrer que si $B \subset \lim_{n\to+\infty} A_n$, alors pour tout $b \in B$, il existe un n_0 tel que $b \in A_n$ pour $n \geqslant n_0$.
   - A-t-on que si $B \subset \lim_{n\to+\infty} A_n$, alors $B \subset A_n$ pour $n \geqslant n_0$ pour un certain n_0 ? Est-ce vrai si B est un sous-ensemble strict de $\lim_{n\to+\infty} A_n$?

4. Essayer de généraliser les autres théorèmes que vous connaissez à ce mode de convergence, ou exhibez des contrexemples.

3 Quelques exercices d'Olympiades

Olympiades internationales de mathématiques (OIM) 1968, exercice 6

Soit n un entier naturel. Calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x.

OIM 1977 exo 6

Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier n,

$$f(n+1) > f(f(n))$$

Montrer que pour tout entier n, $f(n) = n$.

Exercice de préparation des OFM

Soient x, y et z des réels tels que $x^3 = 2y - 1$, $y^3 = 2z - 1$ et $z^3 = 2x - 1$. Montrer que $x = y = z$.

Exercice de préparation des OFM

On définit une suite u_n par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que $u_{1000} > 45$.