Parimaths - Mathematical Olympiads Club

Probabilités et marches aléatoires

Séance du samedi 24 janvier 2015

La séance d'aujourd'hui a pour but d'étudier les *marches aléatoires*.

1 Variables aléatoires discrètes

Cette première partie a pour but de présenter plus ou moins formellement la notion de variable aléatoire *discrète*. Les variables aléatoires discrètes ne sont qu'un cas très particulier de la notion plus générale de *variable aléatoire*, qu'il serait cependant hardi de vouloir décrire correctement en à peine quatre heures. En particulier, certaines définitions données ci-dessous ne concerneront en fait que des cas particuliers de définitions plus générales : par exemple, la notion d'*événement* est en fait bien plus large que celle qui sera donnée ci-dessous.

Définition 1 (Événements, probabilités et boréliens)
Considérons l'ensemble $\Omega = [0,1]^{\mathbb{N}}$ des fonctions $\mathbb{N} \mapsto [0,1]$.
Un *événement élémentaire* est une partie de Ω de la forme $I_0 \times I_1 \times \ldots$, où chaque ensemble I_k est un sous-intervalle de $[0,1]$.
Le *poids* d'un intervalle I est le nombre réel $\mathbf{p}(I) = \sup I - \inf I$ et la *probabilité* de l'événement élémentaire $\prod_{k \geq 0} I_k$ est le nombre réel $\mathbb{P}\left(\prod_{k \geq 0} I_k\right) = \prod_{k \geq 0} \mathbf{p}(I_k)$.
Un *événement* est une partie de Ω obtenue à partir des éléments élémentaires par passage au complémentaire et réunion dénombrable disjointe. On peut calculer sa probabilité comme suit :
— $\mathbb{P}(\Omega \setminus E) = 1 - \mathbb{P}(E)$, et
— $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} E_n\right) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(E)$ si les événements E_n sont deux à deux disjoints.
Enfin, un *borélien* est un ensemble $E \subseteq [0,1]$ tel que $E \times \Omega$ soit un événement. Son *poids* est alors le réel $\mathbf{p}(E) = \mathbb{P}(E \times \Omega)$.

Exercice 1
Montrer que $\{(x, x, \ldots) : 0 \leq x \leq 1\}$ est un événement. Quel est son poids ?

Exercice 2
Montrer que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est un borélien : quel est son poids ?

Exercice 3
Existe-t-il des parties de $[0,1]$ non boréliennes ?

Dans toute la suite, $\mathbf{S}$ désignera un ensemble fini ou dénombrable.

Définition 2 (Variable aléatoire discrète)
Une *variable aléatoire discrète* à valeurs dans $\mathbf{S}$ est une fonction $X : \Omega \mapsto \mathbf{S}$ telle que, pour tout élément $\mathbf{s}$ de $\mathbf{S}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \mathbf{s}\}$ soit un événement.
On notera également cet événement « $X = \mathbf{s}$ » et, de manière générale, pour tout $A \subseteq \mathbf{S}$, on notera « $X \in A$ » l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$.

Exercice 4
Montrer que $X \in A$ est bien un événement.

Exercice 5
Montrer que l'on peut modéliser un tirage aléatoire d'une pièce de monnaie (non biaisée) par une variable aléatoire.

Définition 3 (Égalité en loi)
Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{S}$. On dit que X et Y sont *égales en loi* si $\mathbb{P}[X = \mathbf{s}] = \mathbb{P}[Y = \mathbf{s}]$ pour tout $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$.

Exercice 6
Montrer qu'il existe deux variables aléatoires A et B à valeurs dans $\mathbb{Z}$, distinctes mais égales en loi.

Définition 4 (Produit et indépendance)
Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans deux ensembles $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$. Le *produit* (X, Y) est la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ tel que $(X, Y) : \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$.
On dit que X et Y sont *indépendantes* si

$$\forall (s, t) \in \mathbf{S} \times \mathbf{T}, \mathbb{P}[X = s, Y = t] = \mathbb{P}[X = s] \cdot \mathbb{P}[Y = t].$$

Enfin, si (X_i) est une famille de variables aléatoires, on dit qu'elle est *indépendante* si les variables aléatoires X_i sont deux à deux indépendantes.

Exercice 7
Montrer que l'on peut modéliser une suite de tirages aléatoires indépendants d'une pièce de monnaie par une famille de variables indépendantes.

On devra parfois, dans la suite, considérer des sommes avec une infinité de termes. Cependant, alors que l'on est habitué à ce que la somme d'un nombre fini de termes soit commutative, rien ne vient garantir une telle propriété si on a un nombre infini de termes.

Définition 5 (Série)
Soit $\mathbf{S}$ un ensemble stable par addition, muni d'une notion de *distance*.
Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{S}$. On dit que la *série* $\sum_{n \geq 0} p_n$ *converge* si, quelle que soit la bijection $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, la suite $\left(\sum_{0 \leq k \leq n} p_{\varphi(k)}\right)$ converge quand $n \to +\infty$ et que sa *somme* est $\lim n \to +\infty \left(\sum_{0 \leq k \leq n} p_k\right)$.

En général, on se placera dans le cas où $\mathbf{S} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cependant, on peut très bien considérer des cas plus exotiques, par exemple $\mathbf{S} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ou encore $\mathbf{S} = \mathbb{C}[X]$.

Exercice 8
Soit (p_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre

1. la somme $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge ;
2. la somme $\sum_{n \geq 0} |p_n|$ converge ;
3. il existe un réel A tel que, pour tout $n \geq 0$, $A \geq \sum_{0 \leq k \leq n} |p_k|$;
4. il existe un réel A tel que, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $A \geq \sum_{0 \leq k \leq n} |p_k|$.

En particulier, l'équivalence entre les points 3. et 4. montre que, quand on souhaite calculer la somme d'une série à termes positifs, et quitte à considérer $+\infty$ comme une somme « acceptable », on peut se pemettre de calculer la somme en prenant les termes dans n'importe quel ordre.

De même, si φ est une bijection entre $\mathbb{N}$ un ensemble $\mathbf{T}$, et si $(p_t)_{t \in \mathbf{T}}$ est une famille d'éléments de $\mathbf{S}$, on pourra noter $\sum_{t \in \mathbf{T}} p_t$ la série $\sum_{n \geq 0} p_{\varphi(n)}$. Il convient alors de vérifier que la somme de la série $\sum_{t \in \mathbf{T}} p_t$ ne dépend pas de la bijection φ choisie.

Exercice 9
Soit $\sum_{n \geq 0} p_n$ une série (à valeurs dans $\mathbb{R}$) convergente, et soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ deux bijections. Montrer que les suites $\left(\sum_{0 \leq k \leq n} p_{\varphi(k)}\right)$ et $\left(\sum_{0 \leq k \leq n} p_{\psi(k)}\right)$ ont même limite.

Exercice 10
Soit d un réel. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} n^d$ converge si et seulement si $d < -1$.

Définition 6 (Espérance et variance)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Q}$. On définit l'*espérance* de X est la somme $\mathbb{E}[X] = \sum_{s \in \mathbb{Q}} s\mathbb{P}[X = s]$ (si elle existe) et la *variance* de X comme la différence $\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ (si ces sommes existent).

Exercice 11
Les variables aléatoires suivantes ont-elles une espérance ? une variance ?

1. la variable A à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}[A = k] = 2^{-k-1}$;
2. la variable B à valeurs dans $\{2^k : k \in \mathbb{N}\}$ telle que $\mathbb{P}[B = 2^k] = 2^{-k-1}$;
3. la variable C à valeurs dans $\{2^k : k \in \mathbb{N}\}$ telle que $\mathbb{P}[C = 2^k] = 3 \cdot 4^{-k-1}$.

Exercice 12
Soit A et B deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Q}$, d'espérance et de variance finies. Montrer que $A+B$ est d'espérance et de variance finies, avec $\mathbb{E}[A+B] = \mathbb{E}[A]+\mathbb{E}[B]$, et que $\mathbf{Var}(A+B) = \mathbf{Var}(A) + \mathbf{Var}(B)$ si A et B indépendantes.

Exercice 13
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Q}$, d'espérance et de variance finies. Montrer que $\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$.

Définition 7 (Probabilité conditionnelle)
Soit A et B deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$. La *probabilité conditionnelle de A à B* est la fonction, notée $\mathbb{P}[A \mid B]$ et qui, à tout élement $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ et toute partie $E \subseteq \mathbf{T}$ telle que $\mathbb{P}[B \in E] \neq 0$, associe le réel $\mathbb{P}[A = \mathbf{s} \mid B \in E] = \frac{\mathbb{P}[(A,B) \in \{\mathbf{s}\} \times E]}{\mathbb{P}[B \in E]}$.
On définira de même l'espérance conditionnelle, la variance conditionnelle, etc.

Exercice 14
Soit A et B deux variables aléatoires. Montrer que A et B sont indépendantes si et seulement si la fonction partielle $\mathbb{P}[A \mid B] : \mathbf{S} \times 2^{\mathbf{T}}$ est indépendante en sa deuxième variable.
Montrer alors que $\mathbb{P}[A = \mathbf{s} \mid B \in E] = \mathbb{P}[A = \mathbf{s}]$ pour tout $E \subseteq \mathbf{T}$ tel que $\mathbb{P}[B \in E] \neq 0$.

2 Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$

On modélise maintenant une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$: on tire une infinité de fois, de manière indépendante, une pièce de monnaie non biaisée. On se retrouve donc à étudier une famille de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\mathbb{P}[X_n = -1] = \mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1}{2}$, puis à considérer la famille de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $Z_0 = 0$ et $Z_{n+1} = Z_n + X_n$.

Exercice 15
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 16
Posons $\theta = \mathbb{P}[\exists n > 0, Z_n = 0]$ et $\zeta = \mathbb{P}[\forall n > 0, \exists m > n, Z_m = 0]$. Montrer que $\zeta = \mathbf{1}_{\theta=1}$, puis montrer que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[Z_n = 0] = \frac{1}{1-\theta}$ si $0 \leq \theta < 1$, et que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[Z_n = 0] = +\infty$ si $\theta = 1$.

Exercice 17
Montrer que, pour tout entier n, et avec probabilité 1, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : Z_k = n\}$ est infini.

3 Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$

Cette fois, on modélise une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$: on étudie une famille de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\mathbb{P}[X_n = \mathbf{s}] = \frac{1}{2d}$ pour $\mathbf{s}$ de la forme $(s_1, \ldots, s_d)$ avec $\sum_{i=1}^d |s_i| = 1$. Puis on considère la famille de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $Z_0 = 0$ et $Z_{n+1} = Z_n + X_n$. on suit simultanément d marches aléatoires mutuellement indépendantes, chaque marche correspondant à une des d dimensions de l'espace.

Exercice 18
Posons $\theta^* = \mathbb{P}[\exists n > 0, Z_n = 0]$ et $\zeta^* = \mathbb{P}[\forall n > 0, \exists m > n, Z_m = 0]$. Montrer que $\zeta^* = \mathbf{1}_{\theta^*=1}$, puis montrer que, pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : Z_k = \mathbf{v}\}$ a une probabilité ζ^* d'être infini.

Exercice 19
Montrer que, si $d \leq 2$, alors $\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] = \left(2^{-2n}\binom{2n}{n}\right)^d$.

Exercice 20
Montrer que, si $d = 3$, alors $\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] \leq \frac{3^n}{6^{2n}} \frac{(3m)!}{m!^3} \binom{2n}{n}$, où $m = \lceil n/3 \rceil$.

Exercice 21
Montrer que $\frac{(3m)!}{m!^3} \leq \frac{3^{3m}}{m+1}$ et que $\binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 22
Déduire de tout ceci que, pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : Z_k = \mathbf{v}\}$ a une probabilité $\mathbf{1}_{d\leq 2}$ d'être infini.

4 Solutions des exercices

Solution 1
Pour toute paire $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ telle que $0 \leq k < n$, on note $I_{k,n}$ l'intervalle $[k/n,(k+1)/n]$ et $E_{k,n}$ l'événement élémentaire $\prod_{i\geq 0} I_{k,n}$, de poids 0. Alors $F_n = \bigcup_{0\leq k<n} E_{k,n}$ est un événement de poids 0, puis $\{(x,x,\ldots) : 0 \leq x \leq 1\} = \bigcap_{n\geq 0} F_n$ aussi.

Solution 2
Pour tout rationnel $q \in \mathbb{Q}$, on sait que $\{q\} \times \Omega$ est un événement élémentaire de poids 0. Il s'ensuit que $(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \Omega = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\} \times \Omega)$ est un événement de poids 0, donc que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est un borélien de poids 0.

Solution 3
Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des boréliens, $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des événements élémentaires. Pour $k \geq 0$, on note également $\mathcal{E}_{k+1}$ l'ensemble des événements de la forme $\Omega \setminus E$ ou bien $\bigcup_{n\geq 0} E_n$ avec $E, E_0, E_1, \ldots \in \mathcal{E}_k$ et $E_0, E_1, \ldots$ deux à deux disjoints.
Il est clair que $|\mathcal{E}_0| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$, puis que $|\mathcal{E}_{k+1}| \leq |\mathcal{E}_k^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. L'ensemble des événements est la réunion $\bigcup_{k\geq 0} \mathcal{E}_k$, de sorte que $|\mathcal{B}| \leq \left|\bigcup_{k\geq 0} \mathcal{E}_k\right| = |\mathbb{N} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}| < \left|2^{[0,1]}\right|$, et donc qu'il existe des parties de $[0,1]$ non boréliennes.

Solution 4
Il suffit de remarquer que A est au plus dénombrable et que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ est la réunion disjointe des événements $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}$ pour $a \in A$.

Solution 5
Il suffit de prendre pour modèle la variable aléatoire $X : (s_0, s_1, \ldots) \mapsto \mathbf{1}_{s_0 \leq 1/2}$ et de représenter « pile » par 0 et « face » par 1.

Solution 6
Il suffit de prendre $A = X$ et $B = 1-X$, où X est la variable aléatoire introduite dans la solution ci-dessus.

Solution 7
Cette dois-ci, il suffit de modéliser le k-ième tirage par la variable aléatoire $X_k : (s_0, s_1, \ldots) \mapsto \mathbf{1}_{s_{k-1} \leq 1/2}$. En effet, chaque variable aléatoire représente bien un tirage de la pièce, et les variables sont manifestement indépendantes.

Solution 8
Montrons d'abord que (2) et (3) sont équivalentes. Si (2) est vraie, considérons la bijection $\varphi = \mathbf{Id}$: on sait que la suite $\left(\sum_{0\leq k\leq n} |p_k|\right)$ converge. Elle est donc majorée, ce qui revient à dire que (3) est vraie.
Réciproquement, si (3) est vraie, soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une bijection, et soit n un entier. En posant $N = \max_{0\leq k\leq n} \varphi(k)$, et puisque tous les termes $|p_k|$ sont positifs, on sait que $A \geq \sum_{0\leq k\leq N} |p_k| \geq \sum_{0\leq k\leq n} |p_{\varphi(k)}|$, ce qui montre que la suite $\left(\sum_{0\leq k\leq n} |p_{\varphi(k)}|\right)$ est majorée. Or, cette suite est croissante, donc converge, ce qui montre (2).
Montrons ensuite que (1) est équivalente à (2) et (3). Si (3) est fausse, considérons les ensembles $E_0 = \{k : p_k = 0\}$, $E_1 = \{k : p_k > 0\}$ et $E_2 = \{k : p_k < 0\}$, et notons $\varphi_i(k)$ le $(k+1)$-ième plus petit élément de E_i, s'il existe. Un des ensembles E_i (avec $i = 1$ ou $i = 2$) est nécessairement

infini, et est tel que la suite $\left(\sum_{0 \leq k \leq n} |p_{\varphi_i(k)}|\right)$ n'est pas majorée. Sans perte de généralité, on suppose qu'il s'agit de E_1 ; on pose alors $E_3 = E_0 \cup E_2$. Si E_3 est fini, alors la suite $\left(\sum_{0 \leq k \leq n} p_k\right)$ n'est clairement pas majorée. Sinon, on notons $\varphi_3(k)$ le $(k+1)$-ième plus petit élément de E_3. Alors il existe des entiers $K_0 = 0 < K_1 < \ldots$ tels que $\sum_{K_i \leq k < K_{i+1}} p_k \geq 1 + |p_{\varphi_3(i)}|$. En considérant la bijection $\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ qui énumère les entiers dans l'ordre $\varphi_1(0), \varphi_1(1), \ldots, \varphi_1(K_1 - 1), \varphi_3(0), \varphi_1(K_1), \ldots, \varphi_1(K_2 - 1), \varphi_3(1), \ldots$, il est clair que $\sum_{0 \leq k < i + K_i} p_{\psi(k)} \geq i$, ce qui montre que la suite $\left(\sum_{0 \leq k \leq n} p_{\psi(k)}\right)$ ne converge pas. Dans tous les cas, si (3) est fausse, (1) l'est donc également.

Réciproquement, si (1) est fausse, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_n) = \left(\sum_{0 \leq k \leq n} p_{\varphi(k)}\right)$ ne converge pas : montrons que la suite $(v_n) = \left(\sum_{0 \leq k \leq n} |p_{\varphi(k)}|\right)$ ne converge pas non plus. Si (u_n) n'est pas bornée, et puisque $v_n \geq |u_n|$, il est clair que (v_n) n'est pas bornée non plus, donc ne converge pas. Si (u_n) est bornée mais ne converge pas, alors $\liminf(u_n) < \limsup(u_n)$. En posant $\varepsilon = \frac{\limsup(u_n) - \liminf(u_n)}{4}$, alors il est clair que, pour tout enter $k \geq 0$, il existe un entier $\ell(k) \geq k$ tel que $|u_\ell(k) - u_k| \geq \varepsilon$, donc que $v_{\ell(k)} \geq v_k + \varepsilon$. En notant $\ell^{(n)}$ l'itérée n-ième de la fonction ℓ, il s'ensuit que $v_{\ell^{(n)}(0)} \geq v_0 + n\varepsilon$, donc que (v_n) n'est pas bornée et ne converge pas. Dans tous les cas, si (1) est fausse, (2) l'est également.

Enfin, montrons que (4) est équivalente à (2) et (3). Tout d'abord, si (4) est vraie, il suffit de considérer la bijection $\varphi = \mathbf{Id}$ pour voir que (3) est vraie.

Réciproquement, si (3) est vraie, et A un réel tel que $A \geq \sum_{0 \leq k \leq n} |p_k|$ pour tout n, puis soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une bijection quelconque. On considère alors un entier n, puis l'entier $N = \max_{0 \leq k \leq n} \varphi(k)$. Alors $A \geq \sum_{0 \leq k \leq N} |p_k| \geq \sum_{0 \leq k \leq n} |p_{\varphi(k)}|$, ce qui montre bien que (4) est vraie.

Solution 9

Soit ℓ_φ et ℓ_ψ les limites respectives des suites $\left(\sum_{0 \leq k \leq n} p_{\varphi(k)}\right)$ et $\left(\sum_{0 \leq k \leq n} p_{\psi(k)}\right)$, et soit $\varepsilon > 0$ un réel Puisque $\left(\sum_{0 \leq k \leq n} |p_k|\right)$ converge, soit N un entier tel que, dès que $n \geq N$, on ait $\sum_{N < k \leq n} |p_k| \leq \varepsilon$.

En outre, soit M un entier tel que , pour tout $n \geq M$, on ait

— $|\sum_{0 \leq k \leq M} p_{\varphi(k)} - \ell_\varphi| \leq \varepsilon$;
— $|\sum_{0 \leq k \leq M} p_{\psi(k)} - \ell_\psi| \leq \varepsilon$;
— $N < \varphi(n)$ et $N < \psi(n)$ pour tout $n \geq M$.

Enfin, soit $L = \max_{0 \leq k \leq M} \varphi(k)$. Alors

$$\left|\ell_\varphi - \sum_{0 \leq k \leq N} p_k\right| \leq \left|\ell_\varphi - \sum_{0 \leq k \leq M} p_{\varphi(k)}\right| + \sum_{0 \leq k \leq M, \varphi(k) > N} |p_{\varphi(k)}| \leq \varepsilon + \sum_{N < k \leq L} |p_k| \leq 2\varepsilon.$$

De même, $|\ell_\psi - \sum_{0 \leq k \leq N} p_k| \leq 2\varepsilon$, de sorte que $|\ell_\psi - \ell_\varphi| \leq 4\varepsilon$, donc que $\ell_\psi = \ell_\varphi$.

Solution 10

Tout d'abord, notons que $d \mapsto n^d$ est une fonction croissante. Par conséquent, si $d \geq -1$, alors $\sum n \geq 1 n^d = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} n^d\right) = \sum_{k \geq 0} 2^{k(d+1)} \geq \sum_{k \geq 0} 1 = +\infty$.

D'autre part, si $d < -1$ et si $n \geq 2$, alors $n^d \leq \int_{t=n-1}^{n} t^d \mathrm{d}t = \frac{1}{d+1}(n^{d+1} - (n-1)^{d+1})$. Par conséquent, $\sum_{1 \leq k \leq n} n^d \leq 1 + \frac{1}{d+1}(n^{d+1} - 1) \leq 1 - \frac{1}{d+1}$, de sorte que la série $\sum_{n \geq 1} n^d$ converge bien.

Solution 11

Traitons les trois cas séparément.

1. Une récurrence aisée montre que $k \leq k^2 \leq 16 \cdot (5/4)^{2k}$ pour tout $k \geq 1$, en conséquence de quoi on a bien
$$\sum_{0 \leq k \leq n} k \cdot 2^{-k-1} \leq \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 \cdot 2^{-k-1} \leq \sum_{0 \leq k \leq n} 8 \cdot (25/32)^k \leq \frac{256}{7}$$
pour tout $n \geq 0$, de sorte que $\mathbb{E}[A]$, $\mathbb{E}[A^2]$ et $\mathbf{Var}(A)$ sont bien définies.
2. Ici, $\sum_{0 \leq k \leq n} 2^k \cdot 2^{-k-1} = (n+1)/2$, donc $\mathbb{E}[B]$, et à plus forte raison $\mathbb{E}[B^2]$ et $\mathbf{Var}(B)$ ne sont pas définies.
3. Enfin, $\sum_{0 \leq k \leq n} 2^k \cdot 3 \cdot 4^{-k-1} \leq 3/2$, donc $\mathbb{E}[C]$ existe bien. En revanche, $\sum_{0 \leq k \leq n} 2^{2k} \cdot 3 \cdot 4^{-k-1} = 3(n+1)/4$, donc $\mathbb{E}[C^2]$ et $\mathbf{Var}(C)$ ne sont pas définies.

Solution 12

On va commencer avec un lemme : si $0 \leq U \leq V$ et si $\mathbb{E}[V]$ existe, alors $\mathbb{E}[U]$ existe aussi, avec $\mathbb{E}[U] \leq \mathbb{E}[V]$. En effet,
$$\sum_{q \in \mathbb{Q}} q\mathbb{P}[U = q] = \sum_{q,r \in \mathbb{Q}} q\mathbb{P}[U = q, V = r] \leq \sum_{q,r \in \mathbb{Q}} r\mathbb{P}[U = q, V = r] = \sum_{r \in \mathbb{Q}} r\mathbb{P}[V = r] = \mathbb{E}[V] < +\infty.$$
D'autre part, si $\mathbb{E}[A]$ et $\mathbb{E}[B]$ existent, alors
$$\begin{aligned}
\sum_{q \in \mathbb{Q}} |q\mathbb{P}[A + B = q]| &= \sum_{r,s \in \mathbb{Q}} |r + s|\mathbb{P}[A = r, B = s] \\
&\leq \sum_{r,s \in \mathbb{Q}} |r|\mathbb{P}[A = r, B = s] + \sum_{r,s \in \mathbb{Q}} |s|\mathbb{P}[A = r, B = s] \\
&\leq \sum_{r \in \mathbb{Q}} |r|\mathbb{P}[A = r] + \sum_{s \in \mathbb{Q}} |s|\mathbb{P}[B = s] = \mathbb{E}\left[|A|\right] + \mathbb{E}\left[|B|\right] < +\infty,
\end{aligned}$$
donc $\mathbb{E}[A + B]$ existe aussi, et alors
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A + B] &= \sum_{q \in \mathbb{Q}} q\mathbb{P}[A + B = q] = \sum_{r,s \in \mathbb{Q}} (r + s)\mathbb{P}[A = r, B = s] \\
&= \sum_{r,s \in \mathbb{Q}} r\mathbb{P}[A = r, B = s] + \sum_{r,s \in \mathbb{Q}} s\mathbb{P}[A = r, B = s] \\
&= \sum_{r \in \mathbb{Q}} r\mathbb{P}[A = r] + \sum_{s \in \mathbb{Q}} s\mathbb{P}[B = s] = \mathbb{E}\left[A\right] + \mathbb{E}\left[B\right].
\end{aligned}$$
De plus, si $\mathbb{E}[A^2]$ et $\mathbb{E}[B^2]$ existent également, alors $0 \leq (A + B)^2 \leq A^2 + A^2 + B^2 + B^2$, donc $\mathbb{E}[(A + B)^2]$ existe bien. Enfin, si A et B sont indépendantes, alors
$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(A + B) &= \mathbb{E}[(A + B)^2] - \mathbb{E}[A + B]^2 \\
&= \mathbb{E}[A^2] + 2\mathbb{E}[AB] + \mathbb{E}[B^2] - \mathbb{E}[A]^2 - 2\mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B] - \mathbb{E}[B]^2 \\
&= \mathbf{Var}(A) + \mathbf{Var}(B) + 2\left(\mathbb{E}[AB] - \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B]\right).
\end{aligned}$$
Il suffit donc de montrer que $\mathbb{E}[AB] - \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B] = 0$, ce qui provient du fait que
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[AB] &= \sum_{q,r \in \mathbb{Q}} qr\mathbb{P}[A = q, B = r] = \sum_{q,r \in \mathbb{Q}} qr\mathbb{P}[A = q]\mathbb{P}[B = r] \\
&= \left(\sum_{q \in \mathbb{Q}} q\mathbb{P}[A = q]\right)\left(\sum_{r \in \mathbb{Q}} r\mathbb{P}[B = r]\right) = \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B].
\end{aligned}$$

Solution 13
Il suffit de vérifier que

$$\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] = \mathbf{Var}(X).$$

Solution 14
Si A et B sont indépendantes, et si $\mathbb{P}[B \in E] \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}[A = \mathbf{s} \mid B \in E] = \frac{\mathbb{P}[A = \mathbf{s}, B \in E]}{\mathbb{P}[B \in E]} = \frac{\mathbb{P}[A = \mathbf{s}]\mathbb{P}][B \in E]}{\mathbb{P}[B \in E]} = \mathbb{P}[A = \mathbf{s}].$$

Réciproquement, si A et B ne sont pas indépendantes, soit $(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \in \mathbf{S} \times \mathbf{T}$ tel que $\mathbb{P}[A = \mathbf{s}, B = \mathbf{t}] \neq \mathbb{P}[A = \mathbf{s}]\mathbb{P}[B = \mathbf{t}]$. Alors on sait que $\mathbb{P}[B = \mathbf{t}] \neq 0$, car $\mathbb{P}[A = \mathbf{s}, B = \mathbf{t}] \leq \mathbb{P}[B = \mathbf{t}]$.
Par conséquent,

$$\mathbb{P}[A = \mathbf{s} \mid B \in \Omega] = \mathbb{P}[A = \mathbf{s}] \neq \frac{\mathbb{P}[A = \mathbf{s}, B \in \{\mathbf{t}\}]}{\mathbb{P}[B \in \{\mathbf{t}\}]} = \mathbb{P}[A = \mathbf{s} \mid B \in \{\mathbf{t}\}].$$

Solution 15
Pour arriver en 0 après $2n$ étapes, il faut avoir tiré n fois $+1$ et n fois -1, de sorte que $\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$. Il suffit donc de montrer que $\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}$.
Pour ce faire, posons $h : n \mapsto \frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n-1}n!^2}$. Alors $h(1) = 1$ et

$$\frac{h(n+1)^2}{h(n)^2} = \frac{(n+1)(2n+1)^2(2n+2)^2}{2^4 n(n+1)^4} = \frac{(n+1/2)^2}{n(n+1)} = \frac{n^2+n+1/4}{n^2+n} > 1.$$

Par conséquent, $h(n) \geq h(1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] = 2^{-2n}\binom{2n}{n} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Solution alternative
Montrons comment obtenir de manière différente un résultat analogue.
Pour arriver en $2k$ après $2n$ étapes, il faut avoir tiré $n+k$ fois $+1$ et $n-k$ fois -1, de sorte que $\mathbb{P}[Z_{2n} = 2k] = 2^{-2n}\binom{2n}{n+k}$. En particulier, si $k \geq 1$, alors $\mathbb{P}[Z_{2n} = 2k] = \frac{n+1-k}{n+k}\mathbb{P}[Z_{2n} = 2(k-1)] \leq \mathbb{P}[Z_{2n} = 2(k-1)]$, donc $\mathbb{P}[Z_{2n} = 2k] \leq \mathbb{P}[Z_{2n} = 0]$. D'autre part, $\mathbb{P}[Z_{2n} = k] = 0$ si k est impair.
De sucroît, les variables (X_k) sont mutuellement indépendantes, et satisfont $\mathbb{E}[X_k] = 0$, donc $\mathbf{E}[Z_{2n}] = 0$. En outre, $\mathbb{E}[X_k^2] = 1$, donc $\mathbf{Var}(X_k) = 1$, puis $\mathbf{Var}(Z_{2n}) = 2n$, et enfin $\mathbb{E}[Z_{2n}^2] = 2n$.
En particulier, posons $\ell = \lceil \sqrt{n} \rceil$. Alors

$$2n = \mathbb{E}[Z_{2n}^2] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k\mathbb{P}[Z_{2n}^2 = k] \geq \sum_{k \geq \ell} \ell\mathbb{P}[Z_{2n}^2 = k] = \ell\mathbb{P}[Z_{2n}^2 \geq \ell],$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] &\geq \frac{1}{2\ell-1}\mathbb{P}[-2\ell < Z_{2n} < 2\ell] = \frac{1}{2\ell-1}\left(1 - \mathbb{P}[Z_{2n}^2 \geq 4\ell^2]\right) \\
&\geq \frac{1 - \frac{2n}{4\ell^2}}{2\ell-1} \geq 12(2\ell-1) \geq \frac{1}{2(2\sqrt{n}+1)}.
\end{aligned}$$

Solution 16
Soit R le cardinal de l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : Z_k = 0\}$, et soit R_ℓ le ℓ-ième plus petit élément de $\{k \in \mathbb{N} : Z_k = 0\}$, si $\ell \leq R$. Remarquons que R et R_ℓ sont des variables aléatoires.
Or, $\theta = \mathbb{P}[R \geq \ell + 1 | R \geq \ell, R_\ell = n]$ pour tous les entiers ℓ et n, donc $\theta = \mathbb{P}[R \geq \ell + 1 | R \geq \ell]$ et $\theta^\ell = \mathbb{P}[R \geq \ell + 1]$ pour tout $\ell \geq 0$.
C'est pourquoi

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[Z_n = 0] = \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{Z_n = 0}\right] = \mathbb{E}[R] = \sum_{\ell \geq 0} \ell \mathbb{P}[R = \ell] = \sum_{\ell \geq 1} \mathbb{P}[R \geq \ell] = \sum_{\ell \geq 0} \theta^\ell,$$

de sorte que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[Z_n = 0] = \frac{1}{1-\theta}$ si $0 \leq \theta < 1$ et $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[Z_n = 0] = +\infty$ si $\theta = 1$.
En particulier, $\eta = \lim_{r \to +\infty} \mathbb{P}[R \geq r] = \mathbf{1}_{\theta < 0}$.

Solution 17
On a vu que $\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ si $n \geq 1$, de sorte que

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[Z_n = 0] \geq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[Z_{2n} = 0] \geq \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} n^{-1/2} = +\infty.$$

Or, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pout tout entier $k \in \mathbb{N}$, on sait que $\mathbb{P}[Z_{|n|+k} = n \mid Z_k = 0] = 2^{-|n|}$. Par conséquent, $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}[Z_k = n] \geq 2^{-|n|} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}[Z_k = 0] = +\infty$, ce qui signifie que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : Z_k = n\}$ a une probabilité 1 d'être infini.

Solution 18
Le raisonnement est totalement analogue à celui des exercices 16 et 17.

Solution 19
On a déjà traité le cas $d = 1$ ci-dessus.
Pour le cas 2, on pose $A_n = 1$ si $X_n \in \{(1,0),(0,1)\}$ et $A_n = -1$ si $X_n \in \{(-1,0),(0,-1)\}$. On pose également $B_n = 1$ si $X_n \in \{(1,0),(0,-1)\}$ et $B_n = -1$ si $X_n \in \{(-1,0),(0,1)\}$. On montre alors que (A_n) et (B_n) sont deux familles de variables aléatoires indépendantes, chacune simulant une marche aléatoire non biaisée sur $\mathbb{Z}$.
Par conséquent, $\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] = \mathbb{P}[A_{2n} = 0, B_{2n} = 0] = \mathbb{P}[A_{2n} = 0]\mathbb{P}[B_{2n} = 0] = \left(2^{-2n}\binom{2n}{n}\right)^2$.

Solution 20
Si $d = 3$, alors $\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] = 6^{-2n} \sum_{i+j+k=n} \frac{(2n)!}{(i!j!k!)^2} = 6^{-2n} \sum_{i+j+k=n} \binom{2n}{n}\binom{n}{i\ j\ k}^2$. Or, si $i < j$, notons que $(i+1)!(j-1)! \geq i!j!$. Par conséquent, en posant $u = \lfloor n/3 \rfloor$, $w = \lceil n/3 \rceil$ et $v = n-u-w$, on montre aisément que $i!j!k! \geq u!v!w!$, de sorte que $\binom{n}{i\ j\ k} \leq \binom{n}{u\ v\ w} \leq \binom{3m}{m\ m\ m} = \frac{(3m)!}{m!^3}$.
C'est pourquoi

$$\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] \leq 6^{-2n} \frac{(3m!}{m!^3} \binom{2n}{n} \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i\ j\ k} = \frac{3^n}{6^{2n}} \frac{(3m)!}{m!^3} \binom{2n}{n}.$$

Solution 21
Le raisonnement est analogue à celui de l'exercice 15.

Tout d'abord, posons $f : m \mapsto \frac{(m+1)(3m)!}{3^{3m} m!^3}$. Alors $f(0) = 1$ et

$$\begin{aligned}\frac{f(m+1)}{f(m)} &= \frac{(m+2)(3m+3)(3m+2)(3m+1)}{3^3(m+1)^4} = \frac{(m+2)(m+2/3)(m+1/3)}{(m+1)^3} \\ &= \frac{m^3+3m^2+20m/9+4/9}{m^3+3m^2+3m+1} < 1.\end{aligned}$$

Par conséquent, $f(m) \leq f(0) = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $\frac{(3m)!}{m!^3} \leq \frac{3^{3m}}{m+1}$.
De même, posons $g : n \mapsto \frac{\sqrt{n+1}(2n)!}{2^{2n} n!^2}$. Alors $g(0) = 1$ et

$$\frac{g(n+1)^2}{g(n)^2} = \frac{(n+2)(2n+2)^2(2n+1)^2}{2^4(n+1)^5} = \frac{(n+2)(n+1/2)^2}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n+9n/4+1/2}{n^3+3n^2+3n+1} < 1.$$

Par conséquent, $g(n) \leq g(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $\binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{n+1}}$.

Solution 22
Traitons d'abord le cas $d \leq 3$. On a vu que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[Z_n = 0] = 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[Z_{2n} = 0] = +\infty$ si et seulement si $d \leq 2$, c'est-à-dire que $\eta^* = \mathbf{1}_{d\leq 2}$. Or, si $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{Z}^d$ est un vecteur quelconque, posons $|\mathbf{v}| = \sum_{1 \leq i \leq d} |v_i|$. Alors $\mathbb{P}[Z_{k+|\mathbf{v}|} = \mathbf{v}] \geq 2^{-|\mathbf{v}|}\mathbb{P}[Z_k = 0]$ et $\mathbb{P}[Z_{k+|\mathbf{v}|} = 0] \geq 2^{-|\mathbf{v}|}\mathbb{P}[Z_k = \mathbf{v}]$. Par conséquent, et avec probabilité 1, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : Z_k = 0\}$ est infini si et seulement si l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : Z_k = \mathbf{v}\}$ est infini lui aussi. En particulier, on vient de voir que $\{k \in \mathbb{N} : Z_k = \mathbf{v}\}$ est infini avec probabilité $\eta^* = \mathbf{1}_{d \leq 2}$.
Maintenant, si $d \geq 4$, effectuons une projection π sur les trois premières coordonnées. On pose $\tau(0) = 0$ et $\tau(k+1) = \min\{i \geq \tau(k) : \pi(Z_i) \neq \pi(Z_{\tau(k)})\}$, puis $\overline{X}_k = \pi(Z_{\tau(k+1)}) - \pi(Z_{\tau(k)})$: la variable aléatoire $\overline{X}_k$ décrit bien une marche aléatoire non biaisée dans $\mathbb{Z}^3$. Or, si $\{k \in \mathbb{N} : Z_k = \mathbf{v}\}$ est infini, alors $\{k \in \mathbb{N} : \pi(Z_{\tau(k)}) = \pi(\mathbf{v})\}$ est infini aussi. Ceci est faux, d'où le résultat demandé.